

Ein Beitrag zur Berechnung des dynamischen Verhaltens von Schraubenrotoren unter Betriebsbelastung

Prof. Dr.-Ing. **K. G. Grahl** VDI und Dipl.-Ing. **G. Fölting**, Bochum

Zusammenfassung

Ein Verfahren zur Berechnung der Bauteilverformungen in Schraubenmaschinen unter Berücksichtigung dynamischer Einflüsse wie Massenkräfte, Dämpfung und einer von der Zeit abhängigen Belastung wird beschrieben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Bauteile, die sich bezogen auf Rechenzeiten und Speicherplatz als aufwendigster Bereich des Verfahrens erweist. Die Vorstellung von Rechenergebnissen beschränkt sich deshalb auf diesen Teilbereich.

Summary

A procedure to calculate the deformations of the structural elements of screw compressors with consideration to dynamical influences like mass and damping forces and a time-dependent load vector is presented. Regarding the computer effort the most important part of the procedure is the calculation of eigenvalues and corresponding eigenvectors. Therefore, the presentation of results is limited to this part of the problem.

1. Einleitung

Die Simulation der Funktionsabläufe von Schraubenmaschinen mit Hilfe von Rechenanlagen bietet dem Konstrukteur die Möglichkeit, durch umfangreiche Geometrie- und Parametervariationen diese Maschinen besser und wirtschaftlicher entwickeln und optimieren zu können.

Beim Betreiben von Schraubenmaschinen muß einerseits gewährleistet sein, daß keine unzulässigen Bauteilberührungen auftreten, andererseits dürfen die Spiele zwischen den Rotoren sowie zwischen den Rotoren und dem Gehäuse wegen der damit verbundenen Verschlechterung von Liefergrad und Wirkungsgrad nicht zu groß werden.

Um Voraussagen über die Güte einer Maschine treffen zu können, ist ein Verfahren entwickelt worden, mit dem die Bauteilverformungen von Schraubenmaschinen sowie die Spiele unter Berücksichtigung dynamischer Einflüsse und einer von der Zeit abhängigen Belastung berechnet werden.

2. Kinematik und Thermodynamik

Die rechnerische Erfassung der kinematischen und thermodynamischen Abläufe in einer Schraubenmaschine erfordert zunächst eine Geometrienachbildung der Läufer und des Gehäuses.

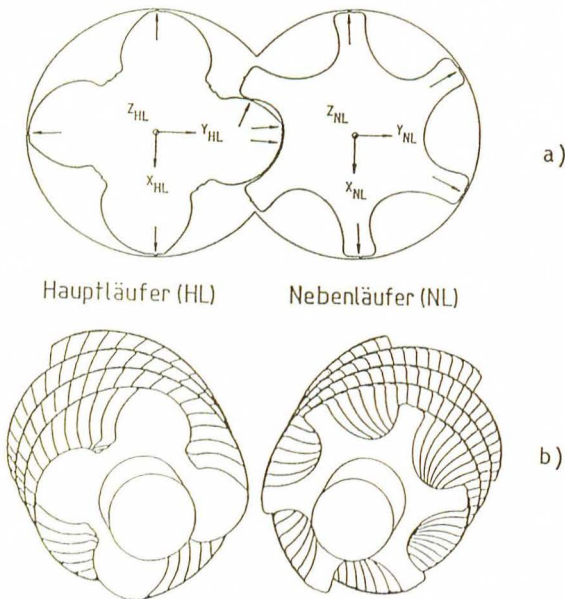


Bild 1: Aufbau der Läuferkonturen
Figure 1: Construction of rotor profiles

Bild 1a zeigt die Stirnschnittprofile des Haupt- und Nebenläufers eines asymmetrischen SRM-Profilpaars mit der Innenwand des zugehörigen Gehäuses. Durch eine Verdrehung der Stirnschnitte von Haupt- und Nebenläufer bei gleichzeitiger Verschiebung in axialer Richtung ergibt sich die vollständige Läuferkontur (Bild 1b). Zwischen den Läufern sowie den Läufern und dem Gehäuse sind die engsten Stellen durch Pfeile markiert (Bild 1a).

Auf die Berechnung der kinematischen und thermodynamischen Funktionsabläufe (/1/,/2/) soll hier nicht näher eingegangen werden.

Nach der thermodynamischen Simulation liegen neben den Ergebnissen wie z.B. Liefergrad und Wirkungsgrad unter anderem auch die Zelldrücke und -temperaturen in jeder Winkelstellung der Läufer vor.

3. Verfahren zur Berechnung der zeitabhängigen Verformungen

Die Verformungen der Bauteile werden mit Hilfe der Finite-Element-Methode (FEM) berechnet. In einem ersten Schritt werden die Netzstrukturen der Läufer und des Gehäuses erstellt und für jede Winkelstellung der Läufer den Oberflächenknoten des FE-Netzes die entsprechenden Zelldrücke und -temperaturen zugeordnet. In Bild 2 ist als Beispiel ein mit finiten Elementen nachgebildetes asymmetrisches SRM-Läuferpaar in einer ausgewählten Winkelstellung mit der zugehörigen Oberflächenbelastung aus Druck und Temperatur dargestellt.

Unter Berücksichtigung des Wärmeübergangs vom Fluid auf die Bauteile und der Wärmeleitung in den Bauteilen werden aus den Fluidtemperaturen die Knotentemperaturen ermittelt. Im Anschluß daran werden aus diesen Knotentemperaturen, den Oberflächendrücken und der Fliehkraft die von der Winkelstellung abhängigen Lastvektoren berechnet.

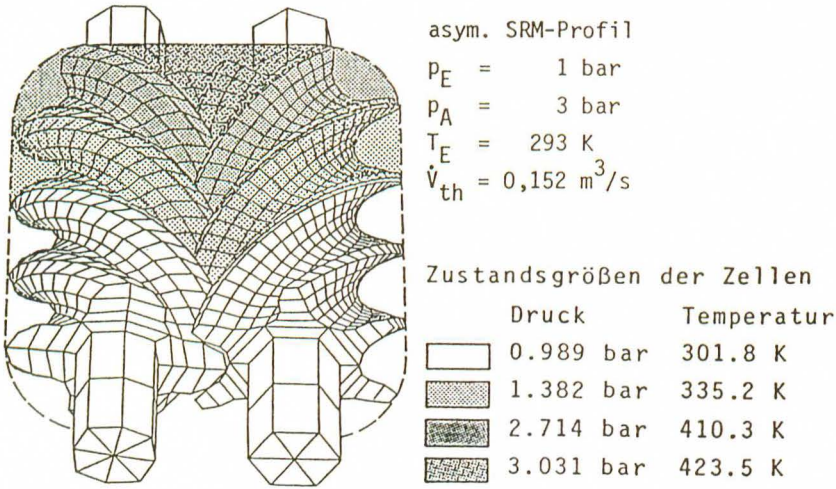


Bild 2: FE-Netzstruktur und Oberflächenbelastung
 Figure 2: FE network structure and surface loading

Für die FE-Netzstruktur des betrachteten Bauteils, Hauptläufer, Nebenläufer oder Gehäuse, ergibt sich aus einer Kräftebilanz die allgemeine Bewegungsgleichung:

$$[M] \ddot{U}(t) + [C] \dot{U}(t) + [K] U(t) = R(t) \quad (1)$$

Darin ist $[M]$ die Massenmatrix, $[K]$ die Steifigkeitsmatrix, $[C]$ die Dämpfungsmatrix und U der Vektor der Knotenverschiebungen.

Mit den ermittelten Lastvektoren sind für jeden Knoten je nach Anzahl der berechneten Winkelstellungen pro Umdrehung diskrete Knotenkräfte bekannt. In Verbindung mit der Lauferdrehzahl folgt daraus der zeitliche Verlauf der Belastungsfunktion $R(t)$.

Bei der Lösung von Gl.(1) wird die Dämpfung als proportional zu den inneren elastischen Kräften angenommen und geht aus diesem Grunde anteilig in die Steifigkeitsmatrix ein.

Ausgehend von der Bewegungsgleichung (1) läßt sich das sogenannte Eigenwertproblem

$$[K] [\Phi] = [\Lambda] [M] [\Phi] \quad (2)$$

formulieren. Als Lösung des Eigenwertproblems ergeben sich die Eigenwerte Λ sowie die Eigenvektoren Φ .

Die Eigenwerte und -vektoren eines Systems sind dabei selbst unabhängig von der anliegenden Belastung. Ein Eigenvektor beschreibt die Form der Schwingung, die sich einstellt, wenn ein Bauteil in der zugehörigen Frequenz angeregt wird. Aus der Überlagerung der angeregten Schwingungsformen ergibt sich die Verformung des betrachteten Bauteils.

Mit dem Ansatz, daß die Verschiebungen $U(t)$ (Gl.(1)) aus einer Überlagerung der Eigenvektoren resultieren

$$U(t) = [\Phi] q(t) \quad (3)$$

läßt sich Gl.(1) nach einigen Umformungen überführen in:

$$\ddot{q}(t) + [\Lambda] q(t) = \sum [P] e^{i\Omega_n t} \quad (4)$$

Mit Hilfe einer Fourier-Reihenentwicklung ist dabei die periodische Belastungsfunktion $R(t)$ in eine Summe harmonischer Funktionen der Form $[P] e^{i\Omega_n t}$ zerlegt worden.

Die Lösung $q(t)$ des Gleichungssystems (4) führt über den Ansatz in Gl.(3) zu den Verschiebungen $U(t)$ der Finite-Element-Knoten. Die Verschiebungen der Oberflächenknoten der FE-Struktur werden mit einem speziellen Abbildungs- und Interpolationsverfahren /1/ auf die aus der Profilerzeugung stammenden Stirnschnittkonturen (Bild 1a) übertragen. Aus den verformten Konturen der Läufer und des Gehäuses ergeben sich die zeitabhängigen Spiele unter Betriebsbelastung.

Die Lösung des Eigenwertproblems (Gl.(2)) stellt sich, bezogen auf die Rechenzeiten und den benötigten Speicherplatz als bedeutendster Teilschritt des gesamten Verfahrens dar. Die folgenden Ausführungen beschränken sich daher auf dieses Teilproblem.

Liegen die Eigenformen eines Bauteils vor, so läßt sich für jede beliebige Belastungsfunktion die Antwort des Systems bestimmen, d.h., für jeden Betriebspunkt können die sich einstellenden zeitabhängigen Verformungen der Bauteile ermittelt werden.

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren größerer Systeme mit sehr vielen Unbekannten eignet sich besonders die sogenannte Vektorunterraum-Iterationsmethode /3/. Grundlage des Verfahrens ist die Annahme, daß zur Bestimmung der Verschiebungen $U(t)$ aus der Überlagerung der Eigenvektoren nur die niedrigsten Eigenformen einen zu beachtenden Beitrag leisten. Der Anteil an der Gesamtverschiebung, der aus den Eigenformen höherer Ordnung resultiert, ist vernachlässigbar klein. Mit der Vektorunterraum-Iterationsmethode werden deshalb nur die niedrigsten Eigenformen berechnet, wobei die Anzahl der gewünschten Frequenzen und Vektoren frei gewählt und der Problemstellung angepaßt werden kann.

Die beschriebenen Rechenverfahren setzen eine Nachbildung der Bauteile als Finite-Element-Netzstruktur voraus. Ein wesentlicher Aspekt, der bei der Erzeugung eines FE-Gitters zu beachten ist, ist die Auswahl eines geeigneten Elementtyps. Verwendet werden isoparametrische Elemente, wie sie in Bild 3 dargestellt sind.

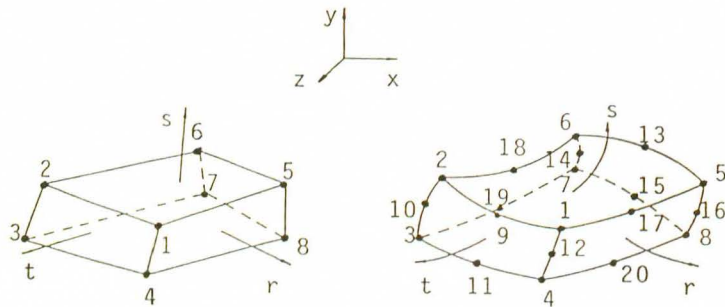


Bild 3: Elemente mit 8 und 20 Knoten
Figure 3: Elements with 8 and 20 nodes

Gegenüber dem dreidimensionalen Quaderelement mit 8 Knoten an den Elementecken ist das 20-Knoten-Element zusätzlich auf jeder Kante mit Seitenmittenknoten besetzt. Dadurch wird es möglich, gekrümmte Elementkonturen nachzubilden und für den Verlauf der Verformungen im Element in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen quadratische Ansatzfunktionen zu formulieren. Diesem Vorteil, der sich in der Genauigkeit der Ergebnisse niederschlägt, steht als Nachteil der steigende Rechenaufwand gegenüber, da die größere Knotenzahl pro Element die Anzahl der Gleichungen der zu lösenden Gleichungssysteme und die Bandbreite der Matrizen deutlich erhöht.

4. Rechenergebnisse

Um zu entscheiden, ob mit 8-Knoten-Elementen ausreichend genaue Ergebnisse zu erzielen sind oder ob trotz des höheren Aufwandes die Verwendung von 20-Knoten-Elementen notwendig ist, sind die ersten Eigenformen einer einseitig bei $z = 0$ (Bild 4) fest eingespannten, rechteckigen Platte mit dem Verhältnis der Kantenlängen $x:y:z$ von 10:1:20 berechnet worden. Für diese Platte sind in der Literatur Meßergebnisse der ersten Eigenfrequenzen veröffentlicht /4/.

Bild 4 vergleicht die Ergebnisse der ersten Eigenfrequenz aus der Berechnung mit 8- bzw. 20-Knoten-Elementen, wobei in x -Richtung 2 Elemente und in y -Richtung 1 Element gewählt wurde. In Richtung der längsten Kante wurde zwischen 4 und 25 Elementen variiert.

Die 1. Eigenfrequenz wurde bei 835 Hz gemessen /4/. Während bei Verwendung von 20-Knoten-Elementen schon mit 7 bis 8 Elementen in z -Richtung ein stabiles und mit dem Meßwert gut übereinstimmendes Ergebnis von 846 Hz erreicht wird, konvergiert die Rechnung mit 8-Knoten-Elementen nur äußerst langsam. Selbst mit 25 Elementen in z -Richtung beträgt die Abweichung gegenüber dem Meßergebnis noch über 20 %.

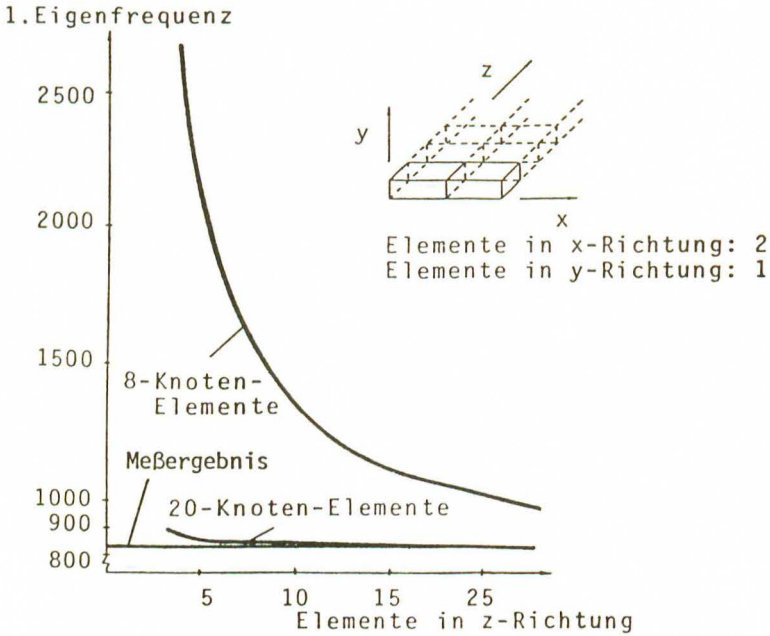


Bild 4: 1. Eigenfrequenz, berechnet mit 8- und 20-Knoten-Elementen

Figure 4: 1. eigenfrequency, calculated with 8- and 20-node elements

In einer weiteren Vergleichsrechnung wurden die ersten 6 Eigenfrequenzen für den Fall untersucht, daß die Gesamtanzahl der Knoten der FE-Struktur bei der Nachbildung mit je 108 Knoten konstant gehalten wurde (Bild 5). Während die mit 8-Knoten-Elementen aufgebaute Struktur 34 Elemente hat, sind es bei Verwendung von 20-Knoten-Elementen nur 10. Die prozentualen Abweichungen zu den Meßergebnissen (Absolutwerte siehe Bild 6) sind in Klammern angegeben. Trotz der erheblich höheren Elementzahl sind die Ergebnisse aus der Rechnung mit 8-Knoten-Elementen auch für diesen Fall wesentlich ungenauer als die mit 20-Knoten-Elementen ermittelten Werte. Die größten Abweichungen zu den Meßergebnissen liegen mit 36 % deutlich über denen aus der Berechnung mit 20-Knoten-Elementen. Hier betragen die größten

Bild 5:
Gerechnete Eigen-
frequenzen bei
gleicher Knoten-
zahl

Figure 5:
Eigenfrequencies,
calculated with an
identical number
of nodal points

			
8-Knoten-Elemente		20-Knoten-Elemente	
Elemente: 34		Elemente: 10	
Knoten : 108		Knoten : 108	
Nr.	Eigenfreq. [Hz]	Nr.	Eigenfreq. [Hz]
1	1113 (33,3%)	1	860 (3,0%)
2	3725 (5,0%)	2	3593 (1,3%)
3	6914 (35,7%)	3	5441 (6,8%)
4	7266 (-)	4	7112 (-)
5	12532 (9,4%)	5	11755 (2,6%)
6	19158 (29,7%)	6	15710 (6,3%)

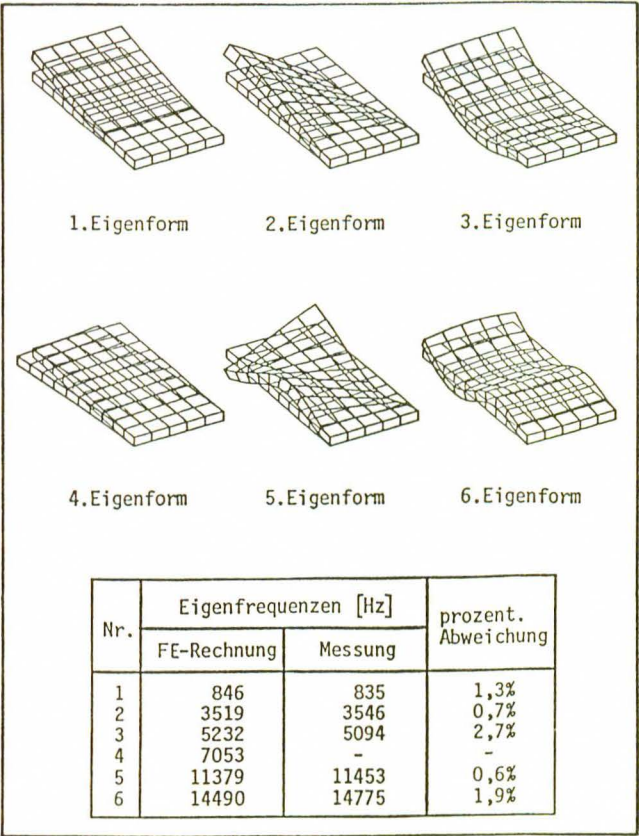


Bild 6:
Eigenformen und
-frequenzen der
untersuchten
Platte

Figure 6:
Eigenvectors and
eigenfrequencies
of tested struc-
ture

Differenzen bezogen auf die Meßergebnisse nur etwa 7 %. Nachzutragen bleibt, daß zur 4. Eigenfrequenz kein Meßergebnis vorliegt.

Bild 6 zeigt die ersten 6 berechneten Schwingungsformen der untersuchten Platte, wobei die Struktur mit 50 20-Knoten-Elementen nachgebildet wurde. Ebenfalls aufgelistet sind die zugehörigen Eigenfrequenzen und die sich in diesem Fall ergebenden Abweichungen zu den Meßergebnissen, die zwischen 0,6 % und 2,7 % liegen.

Die Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß mit 20-Knoten-Elementen bei jeweils gleichen Knotenzahlen der FE-Struktur, also insgesamt weniger Elementen, bessere Ergebnisse erzielt werden als mit 8-Knoten-Elementen. Deshalb werden im folgenden ausschließlich 20-Knoten-Elemente verwendet.

Bild 7 stellt die mit 20-Knoten-Elementen erzeugten FE-Stirnschnitte eines asymmetrischen SRM-Profilpaares mit 4 Haupt- und 6 Nebenläuferzähnen dar.

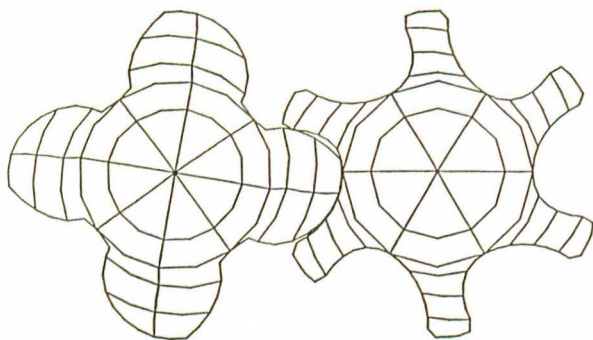


Bild 7: FE-Stirnschnitt eines asymmetrischen SRM-Läufer-paares

Figure 7: FE front surface of asymmetrical SRM rotors

Die FE-Außenknoten liegen jeweils auf der aus der Profilerzeugung stammenden genaueren Stirnschnittkontur (Bild 1a). Die Zahl der Elemente beträgt in den Hauptläuferscheiben 40 und in den Nebenläuferscheiben 36.

Die FE-Netzstrukturen des betrachteten Läuferpaares sind mit einem Graphikprogramm dreidimensional dargestellt worden (Bild 8a). Beide Läufer sind aus 10 Elementscheiben im Profilbereich und je 2 Scheiben an den Wellenenden aufgebaut. Die Struktur des Hauptläufers besteht aus 432 Elementen mit einer Gesamtknotenzahl von 2584. Beim Nebeläufer sind es 384 Elemente und 2676 Knoten.

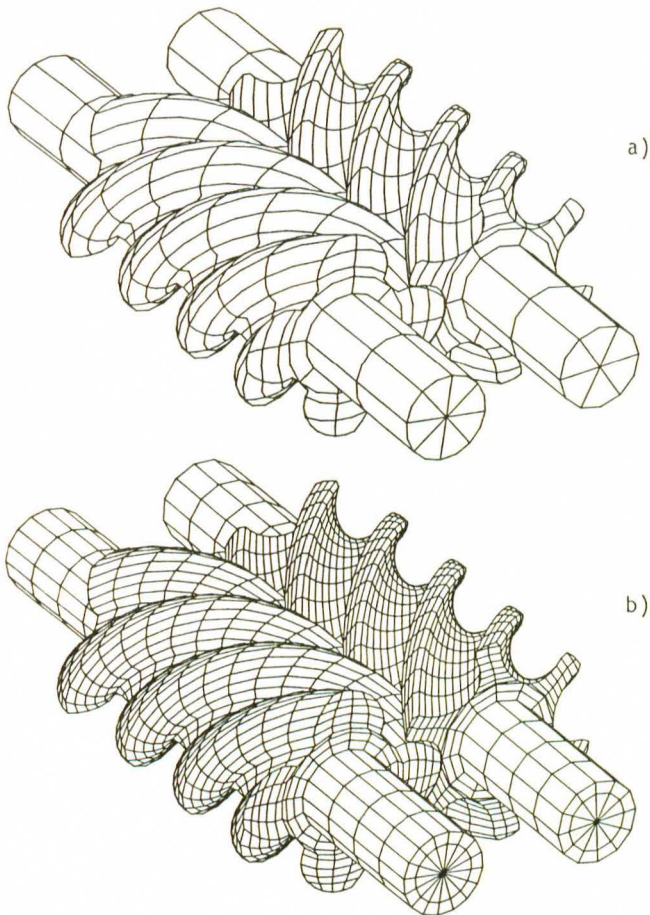


Bild 8: FE-Netzstruktur eines asymmetrischen SRM-Läuferpaares

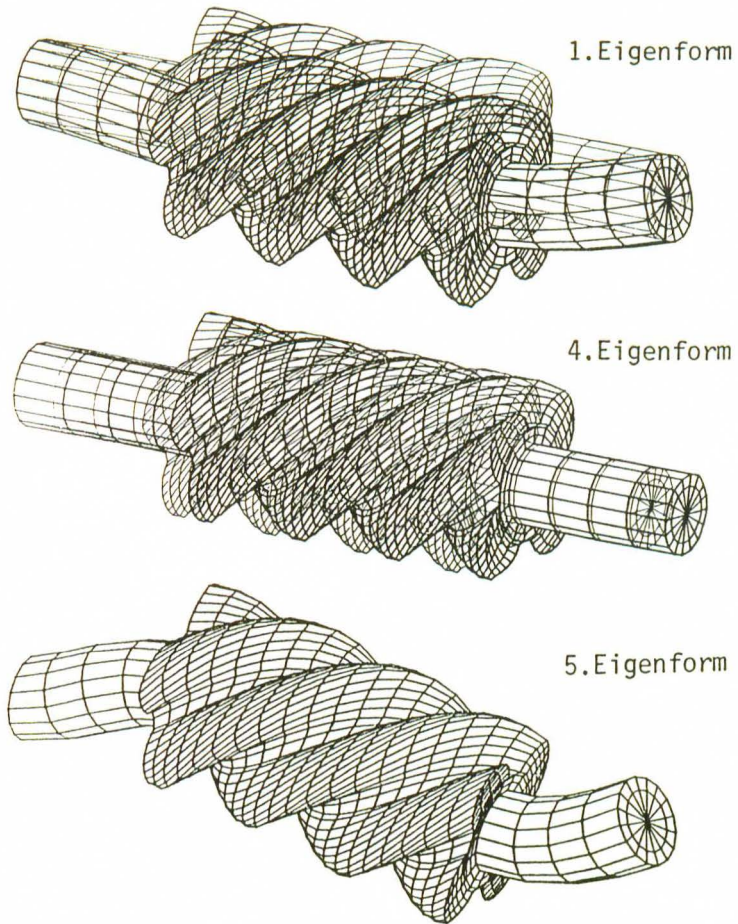
Figure 8: FE network structure of asymmetrical SRM rotors

An den stirnseitigen Oberflächen der Wellenstümpfe werden die auf dem äußeren Umfang liegenden Knoten in geeigneter Weise gebunden, um die Lagerung durch ein Fest- und ein Loslager zu simulieren.

Abgesehen von den durch diese Randbedingungen gebundenen Knoten gehören zu jedem FE-Knoten die drei Freiheitsgrade der Verschiebung in x-, y- und z-Richtung. Dies führt sowohl beim Hauptläufer als auch beim Nebenläufer zu Gleichungssystemen mit ca. 8000 Gleichungen.

Aus programminternen Gründen liegt den in den folgenden Bildern dargestellten Eigenformen der Läufer ein verfeinertes Raster (Bild 8b) zugrunde, wobei die Verschiebungen in den zusätzlich definierten Zwischenpunkten mit Hilfe der Interpolationsfunktionen bestimmt werden. Die Berechnung der Eigenformen erfolgt jedoch für das 20-Knoten-Raster, wie es im oberen Teilbild 8a gezeigt ist.

Bild 9 zeigt Ergebnisse aus der Eigenwertberechnung des Hauptläufers. Die ersten 10 Eigenfrequenzen sind tabellarisch aufgelistet. Bei den Eigenformen 1 und 2, 5 und 6 bzw. 7 und 8 handelt es sich um Biegeschwingungen, die aus Symmetriegründen paarweise mit gleicher Frequenz auftreten. Die erste Eigenfrequenz liegt bei 883 Hz. Am linken Wellenende ist als Randbedingung ein Festlager angenommen worden. Die gegenüber dem rechten Wellenende festere Einspannung führt dazu, daß die maximale Durchbiegung des Läufers nicht in der Mitte, sondern zum rechten Wellenstumpf hin verschoben auftritt. Bei der in Bild 9 nicht dargestellten 2. Eigenform verformt sich der Läufer in der gleichen Weise wie bei der 1. Schwingungsform, aber um den Winkel von 90° versetzt. Die dritte ebenfalls nicht dargestellte Eigenform bei 1313 Hz ist eine Torsionsschwingung. Die vierte Eigenform ist eine Längsschwingung mit einer Frequenz von 2564 Hz. Das Loslager am rechten Wellenende ermöglicht die Schwingung des Läufers in axialer Richtung. Zur Verdeutlichung ist in den beiden oberen Teilbildern die unverformte Struktur ebenfalls geplottet worden.



Nr.	Eigenfreq. [Hz]	Nr.	Eigenfreq. [Hz]
1	883	6	2611
2	883	7	6385
3	1313	8	6385
4	2564	9	7701
5	2611	10	10318

Bild 9: Eigenformen und -frequenzen eines Hauptläufers mit asymmetrischem SRM-Profil

Figure 9: Eigenfrequencies and eigenvectors of asymmetrical SRM male rotor

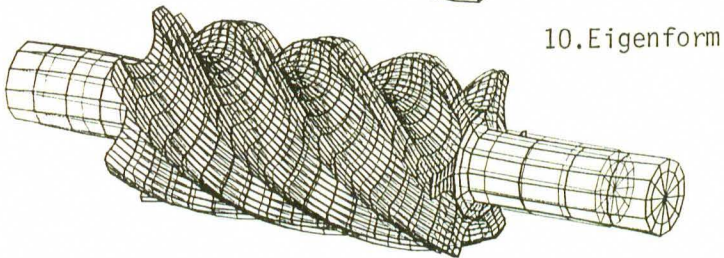
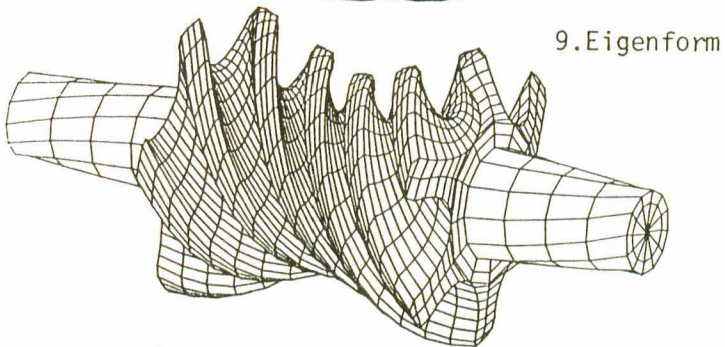
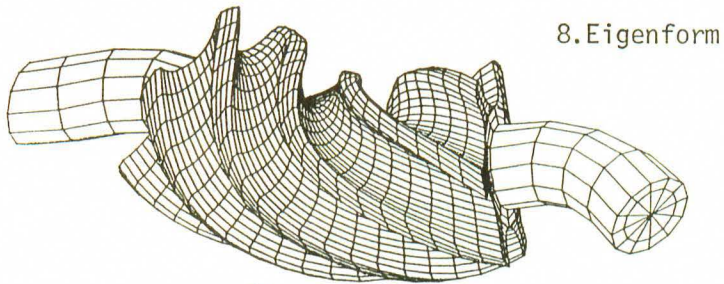
Wie schon die erste tritt auch die zweite Biegeschwingung als doppelte Eigenform auf. Die Frequenz beträgt 2611 Hz. Es verformen sich vor allem die Wellenenden, während der mittlere Bereich des Läufers aufgrund der großen Biegesteifigkeit relativ starr bleibt. Dies ändert sich bei Eigenfrequenzen höherer Ordnung.

Die Tabelle in Bild 10 zeigt die ersten 10 Eigenfrequenzen des Nebenläufers, die ein wenig über denen des zugehörigen Hauptläufers liegen. Auch hier treten die Biegeschwingungen paarweise auf. Dargestellt sind drei Eigenformen höherer Ordnung. Bei 6656 Hz tritt die 3. Biegeschwingung (8. Eigenform) auf, bei der neben den Wellenenden auch der mittlere Läuferbereich deutlich verformt wird.

Die 2. Torsionsschwingung (9. Eigenform) zeichnet sich durch eine zweifache Verdrillung des Läufers aus. Dabei dehnen sich die druck- bzw. saugseitigen Stirnschnitte aus, während der Rotor im mittleren Bereich eingeschnürt wird. Im unteren Teilbild ist die 10. Eigenform dargestellt. Es handelt sich um die 2. Längsschwingung, bei der der Läufer an einem Wellenende gestaucht und an dem anderen Wellenzapfen in axialer Richtung gedehnt wird. Der gestauchte Wellenstumpf verdickt sich dabei, die Dehnung des zweiten Wellenzapfens hat eine Verjüngung des Querschnittes zur Folge.

5. Schlußbetrachtung

Abschließend sei noch einmal daran erinnert, daß die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren die Voraussetzung zur Ermittlung der Bauteilverformungen und der sich daraus ergebenden Spiele im Betriebszustand ist. Grundlage des Verfahrens ist die Annahme, daß sich die Verformung der Bauteile aus der Überlagerung der Eigenformen ergibt, wobei nur die niedrigsten Eigenformen berücksichtigt werden müssen.



Nr.	Eigenfreq. [Hz]	Nr.	Eigenfreq. [Hz]
1	940	6	2763
2	940	7	6655
3	1488	8	6655
4	2752	9	7846
5	2763	10	10815

Bild 10: Eigenformen und -frequenzen eines Nebenläufers mit asymmetrischem SRM-Profil

Figure 10: Eigenfrequencies and eigenvectors of asymmetrical SRM female rotor

Für einen Hauptläufer und einen Nebenläufer mit asymmetrischem SRM-Profil sind jeweils die ersten 10 mit finiten Elementen berechneten Eigenformen dargestellt und erläutert worden. Wieviele Eigenformen notwendig sind, um die Bauteilverformungen im Zusammenhang mit dem Lastvektor ausreichend genau zu berechnen, kann zur Zeit noch nicht definitiv beantwortet werden, da die Untersuchungen noch andauern. Es läßt sich aber festhalten, daß die Zahl der benötigten Eigenschwingungsformen im wesentlichen von der anregenden Belastungsfunktion und der Profilform der Bauteile abhängt.

6. Literatur

- /1/ Buthmann, P.: Rechnergestützte Schraubenverdichterprofilentwicklung und -rotorauslegung unter Berücksichtigung der betriebsbedingten Verformungen
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1985)

- /2/ Neumann, G.: Berechnete, prozeßbeeinflussende Strömungsvorgänge in Schraubenverdichtern
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1986)

- /3/ Bathe, K.-J.; Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976)

- /4/ Barton, M.V.: Vibration of Rectangular and Skew Cantilever-Plates
Journal of Applied Mechanics 18, Juni 1951