

# Berechnung der Schwingungen und Verformungen von Schraubenmaschinenrotoren und -gehäusen im Betrieb

Prof. Dr.-Ing. **K. G. Grahl** VDI, und Dr.-Ing. **G. Föling**, Bochum

## Zusammenfassung

Mit Hilfe der Finite-Element-Methode werden die Schwingungen und Verformungen der Rotoren und Gehäuse von Schraubenmaschinen berechnet. Die Verschiebungen der FE-Knoten durch die Temperatur- und die Fliehkraftbelastung sind zeitlich konstant. Die Verformungen aus der zeitlich veränderlichen Druckbelastung folgen aus der Überlagerung der niedrigsten Eigenformen. Mit der Berechnung der Spiele im Betrieb wird der berührungsfreie Lauf der Rotoren im Gehäuse überprüft. Die Größe der Spaltflächen ermöglicht Rückschlüsse auf eine eventuelle Verschlechterung des Liefergrades und des polytropen Wirkungsgrades.

## Summary

The vibrations and deformations of the rotors and the casing of screw machines are calculated with the Finite Element method. The displacements of the FE nodal points by temperature and the centrifugal force are independent of time. The deformations by pressure load accrue from superposition of the lowest natural modes. The calculation of the clearances under service conditions ensures that the rotors run without contact. The volumetrical and polytropical efficiencies decrease if the clearances are too large.

## 1. Einleitung

Die Berechnung der Verformungen und Schwingungen der Rotoren und Gehäuse von Schraubenmaschinen ermöglicht es, Voraussagen über das Verhalten der Maschinen im Betrieb zu treffen. Für die Konstruktion und Optimierung von Profilgeometrien ist die rechnerische Simulation ein wertvolles Hilfsmittel zur Minimierung der Kosten in der Entwicklungsphase. Nach einem Überblick über das Gesamtverfahren werden einzelne Verfahrensschritte näher erläutert und Ergebnisse vorgestellt.

## 2. Überblick über das Gesamtverfahren

Zu Beginn wird die Läufer- und Gehäusegeometrie aufbereitet, um die thermodynamischen Zustandsänderungen in der Maschine zu erfassen (Bild 1). Neben dem Liefergrad und dem polytropen Wirkungsgrad sind nach der thermodynamischen Berechnung auch die Drücke und Temperaturen in den einzelnen Zellen in ihren zeitlichen Verläufen bekannt.

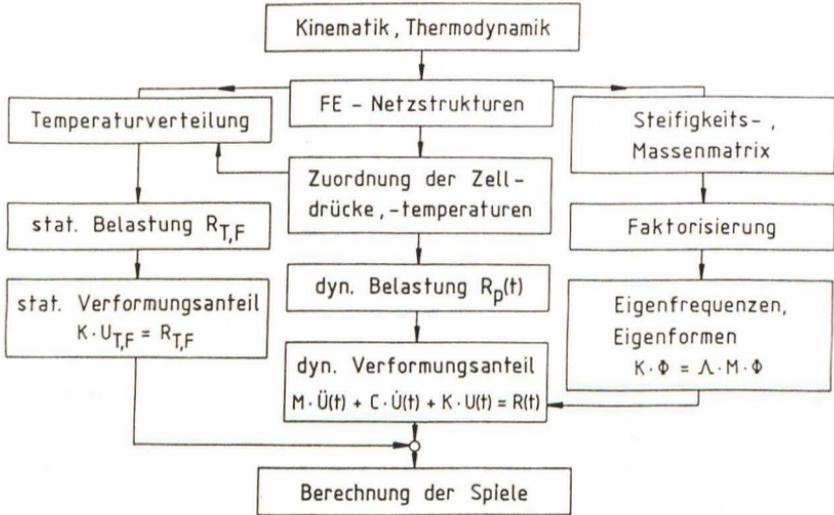


Bild 1: Schema des Rechenverfahrens

Figure 1: Survey of the calculation scheme

Sowohl die Läufer als auch das Gehäuse werden als Finite-Element-Netzstruktur modelliert; jedem Netzknoten werden diese Druck- und Temperaturverläufe anschließend zugeordnet. Es stellt sich in jedem Betriebspunkt eine stationäre Temperaturverteilung ein, die mit Hilfe eines speziellen FE-Berechnungsprogramms und mit den Temperaturverläufen als Randbedingung ermittelt wird.

Ebenso wie die Temperaturbelastung ist auch die Belastung durch die Fliehkraft von der Zeit unabhängig, da von einer konstanten Drehzahl in jedem betrachteten Betriebspunkt ausgegangen wird. Aus der Temperatur- und der Fliehkraftbelastung werden äquivalente Knotenkräfte  $R_{T,F}$  berechnet, die den von der Zeit unabhängigen Anteil an der Gesamtverschiebung der FE-Knoten bedingen.

Die Druckbelastung führt zu den äquivalenten Knotenkräften  $R_p$ , die jedoch zeitlich

veränderlich sind. Um den dynamischen Verformungsanteil zu bestimmen, ist es notwendig, die allgemeine Bewegungsgleichung zu lösen, die die Trägheitskräfte, die Dämpfungskräfte und die elastischen Kräfte mit den äußeren Knotenlasten ins Gleichgewicht setzt.

Mit der Steifigkeits- und der Massenmatrix wird das Eigenwertproblem formuliert, dessen Lösung die Eigenvektoren  $\phi$  und die Eigenwerte  $\lambda$  sind.

Mit der Annahme, daß sich die Knotenverschiebungen  $U(t)$  aus einer Überlagerung der niedrigsten Eigenformen ergeben, wird die Bewegungsgleichung gelöst.

In einem abschließenden Schritt werden aus den FE-Knotenverschiebungen, die aus der Summe des statischen und des dynamischen Anteils zusammengesetzt sind, mit einem speziellen Verfahren die minimalen Abstände zwischen den Bauteilen in ihren zeitlichen Verläufen ermittelt.

### 3. Finite-Element-Netzstrukturen

Bild 2 zeigt als Beispiel die FE-Netzstrukturen eines Läuferpaares mit asymmetrischem SRM-Profil in dreidimensionaler, perspektivischer Darstellung, die mit einem eigenen Graphikprogramm erzeugt wurde. Verwendet wurden Hexaeder-Elemente mit 20 Knoten. Der Hauptläufer besteht aus 432 Elementen und 2584 Knoten, beim Nebenläufer sind es 384 Elemente und 2676 Knoten.

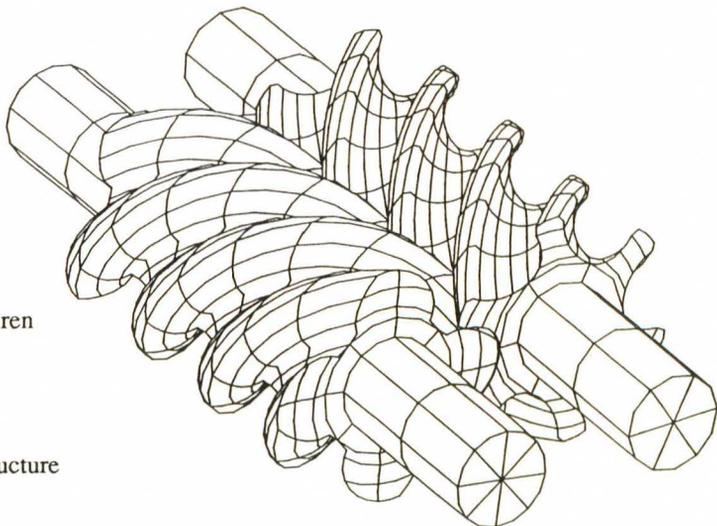


Bild 2:  
FE-Netzstrukturen  
der Läufer

Figure 2:  
FE network structure  
of the rotors

Das Gehäuse, in dem Haupt- und Nebenläufer rotieren, besteht aus drei Komponenten: dem Einström-, dem Läufer- und dem Getriebegehäuse (Bild 3). Um bei der Nachbildung des Gehäuses mit finiten Elementen den benötigten Speicherplatz zu minimieren, wird nur der für die spätere Berechnung der Spiele wesentliche mittlere Bereich, das Läufergehäuse, als FE-Netzstruktur modelliert.

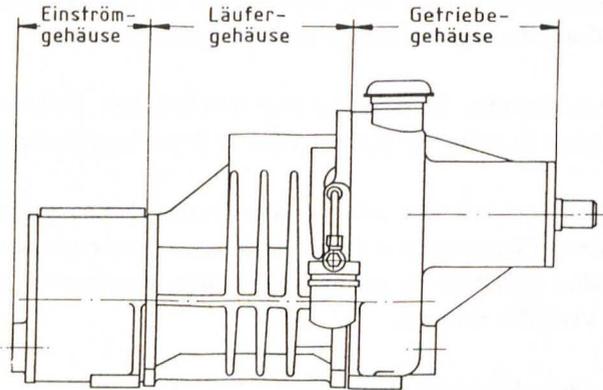
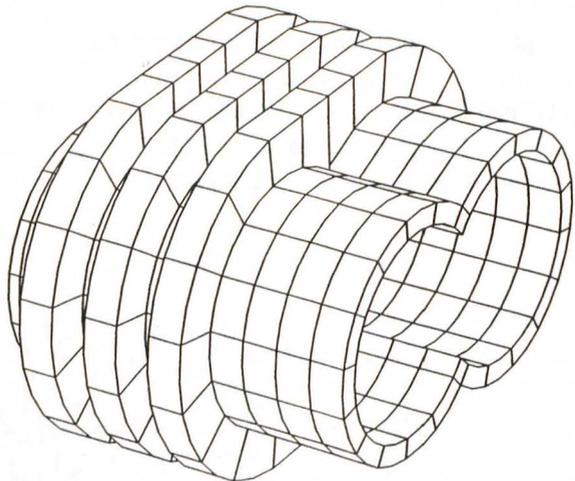


Bild 3:  
FE-Netzstrukturen des  
Gehäuses  
(364 Elemente,  
2685 Knoten)

Figure 3:  
FE network structure  
of the casing  
(364 elements,  
2685 nodal points)



#### 4. Berechnung der Temperaturverteilung

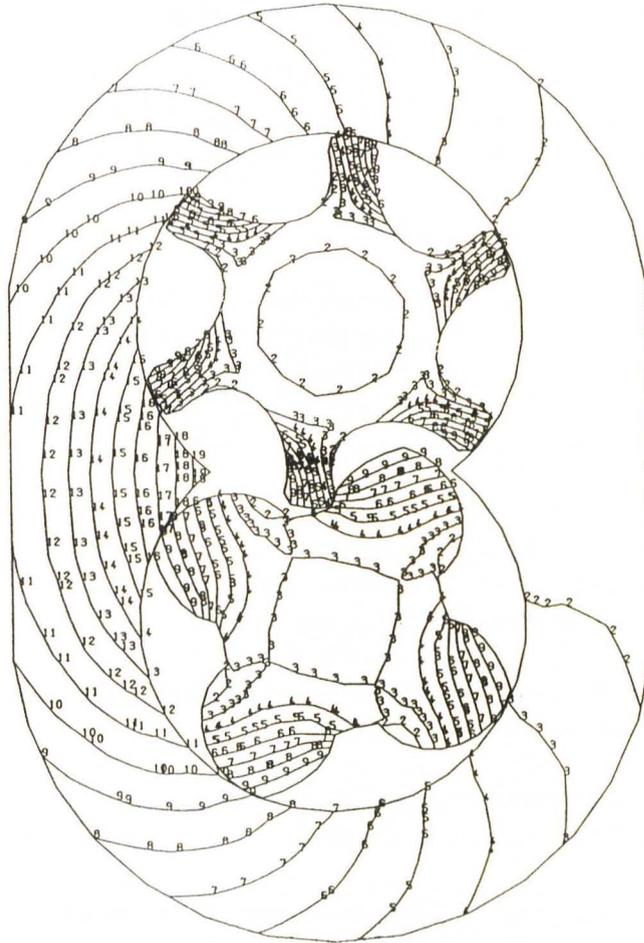
Aus der thermodynamischen Berechnung sind die Fluidtemperaturen in den jeweiligen Zellen über der Zeit bekannt. Für jeden Oberflächenknoten wird aus dem zeitlichen Temperaturverlauf eine mittlere Fluidtemperatur berechnet. Unter Berücksichtigung des Wärmeübergangs vom Fluid auf die Bauteile und der Wärmeleitung in den Bauteilen

ergeben sich mit den gemittelten Temperaturen als Randbedingung die Knotentemperaturen der FE-Struktur.

GE: 19 = 339.3 K  
 17 = 335.5 K  
 15 = 331.6 K  
 13 = 327.8 K  
 11 = 324.0 K  
 9 = 320.1 K  
 7 = 316.3 K  
 5 = 312.5 K  
 3 = 308.6 K  
 1 = 304.8 K

HL: 9 = 351.9 K  
 7 = 351.3 K  
 5 = 350.6 K  
 3 = 350.0 K  
 1 = 349.4 K

NL: 9 = 343.5 K  
 7 = 342.8 K  
 5 = 342.1 K  
 3 = 341.4 K  
 1 = 340.6 K



asym. SRM-Profil,  $p_E = 1$  bar,  $p_A = 3$  bar,  $T_E = 293$  K,  $\dot{V}_{th} = 0,152$  m<sup>3</sup>/s

Bild 4: Temperaturverteilung

Figure 4: Distribution of temperature

In Bild 4 ist die Temperaturverteilung des betrachteten Läuferpaares und des Gehäuses in einem ausgewählten Stirnschnitt im Bereich der Druckseite in Form von Isolinen dargestellt. Der Schnitt liegt innerhalb einer Gehäuserippe.

Im Stirnschnitt liegt in allen Zähnen die gleiche Temperaturverteilung vor. Die Temperaturdifferenzen betragen bei den Läufern nur etwa 3 K, beim Gehäuse sind es 35 K. In der hier nicht dargestellten axialen Richtung sind die Temperaturen sowohl bei den Läufern als auch beim Gehäuse an der Druckseite um etwa 30 K bis 35 K höher als an der Saugseite.

Aus der Belastung der FE-Netzstrukturen durch die Temperaturverteilung wird zusammen mit der Fliehkraftbelastung der statische Verformungsanteil ermittelt.

## 5. Eigenfrequenzen und Eigenformen

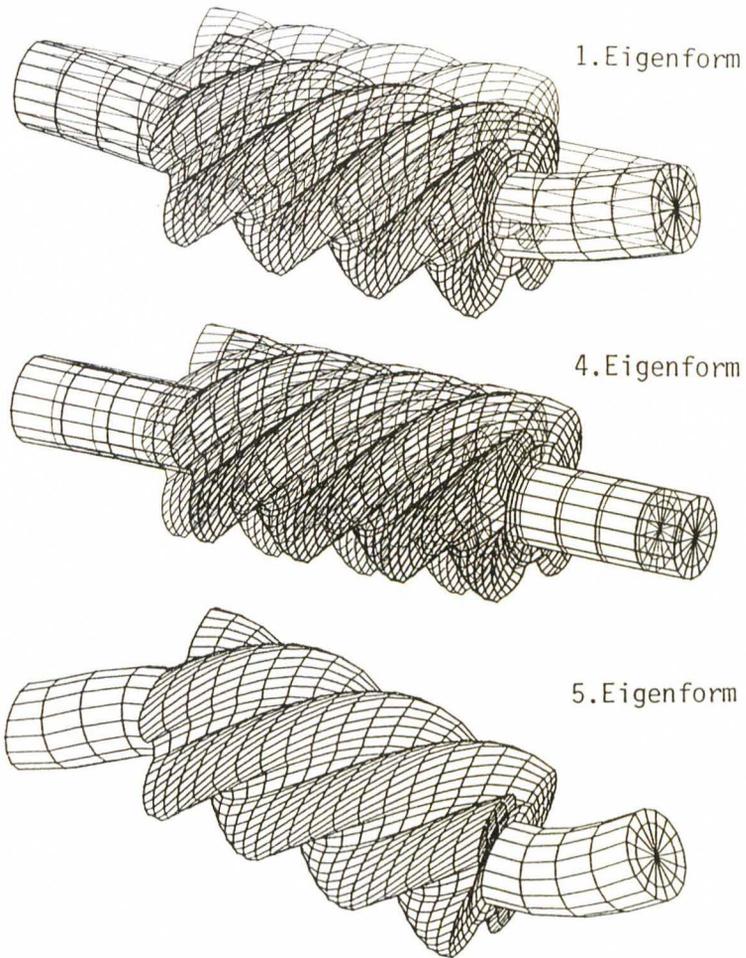
Zur Bestimmung des dynamischen Verformungsanteils werden zunächst die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren der Bauteile berechnet. Die Ermittlung der Eigenformen ist der aufwendigste Bereich des gesamten Verfahrens. Die zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge und ihre speziellen programmtechnischen Lösungen sind in der angegebenen Literatur [ 4 ] ausführlich dargelegt.

Bild 5 zeigt exemplarisch Ergebnisse aus der Eigenwertberechnung des Hauptläufers. Die ersten 10 Eigenfrequenzen sind tabellarisch aufgelistet. Bei den Eigenformen 1 und 2, 5 und 6 bzw. 7 und 8 handelt es sich um Biegeschwingungen, die aus Symmetriegründen paarweise bei einer Frequenz auftreten.

In Bild 6 sind die ersten 10 berechneten Eigenfrequenzen und Plots der 1. und 2. Eigenform des Gehäuses dargestellt.

Die niedrigsten Eigenfrequenzen liegen weit über denen der Läufer. Die hier gezeigten Eigenformen ergeben sich bei 3367 Hz bzw. 3391 Hz.

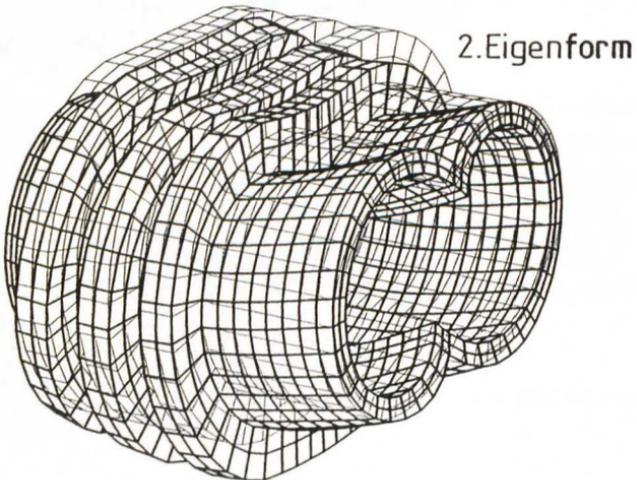
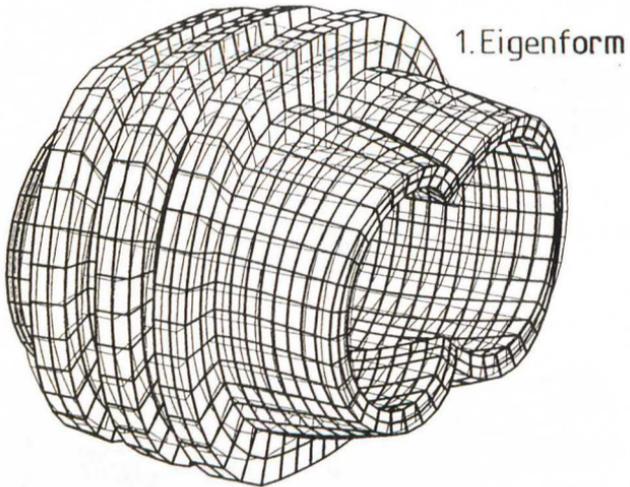
Die Anregung von Resonanzschwingungen mit der Drehzahlfrequenz, z.B. durch Unwuchten, kann für die hier betrachteten Läufer und das Gehäuse ausgeschlossen werden, da diese Eigenfrequenzen weitaus größer sind als die Betriebsdrehzahl. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß der Volumenstrom pulsierend gefördert wird, wobei die Zahl der Impulse pro Umdrehung von den Zähnezahlen der Läufer abhängt. Bei 4 Hauptläuferzähnen und einer Drehzahl des Hauptläufers von 190 1/s ergibt sich eine Pulsationsfrequenz von 760 Hz. Zwar liegt die Ausstoßfrequenz hier unterhalb der Eigenfrequenzen der Bauteile, doch wird deutlich, daß bei veränderten Läufergeometrien oder höheren Drehzahlen die Frequenz der Druckstöße sehr wohl im Bereich der 1. Eigenfrequenz liegen kann.



Nr.	Eigenfreq. [Hz]	Nr.	Eigenfreq. [Hz]
1	883	6	2611
2	883	7	6385
3	1313	8	6385
4	2564	9	7701
5	2611	10	10318

Bild 5: Eigenformen und -frequenzen des Hauptläufers

Figure 5: Natural modes and frequencies of the male rotor



Eigenfrequenzen Gehäuse (asym. SRM) [Hz]			
1	3 367	6	5 673
2	3 391	7	5 769
3	4 161	8	6 154
4	4 666	9	6 431
5	5 663	10	6 511

Bild 6: Eigenformen und -frequenzen des Gehäuses

Figure 6: Natural modes and frequencies of the casing

## 6. Verformungen und zeitliche Spielverläufe

Die Verformungen durch die Druckbelastung ergeben sich, wie bereits zu Beginn erwähnt, aus der Superposition der Eigenvektoren.

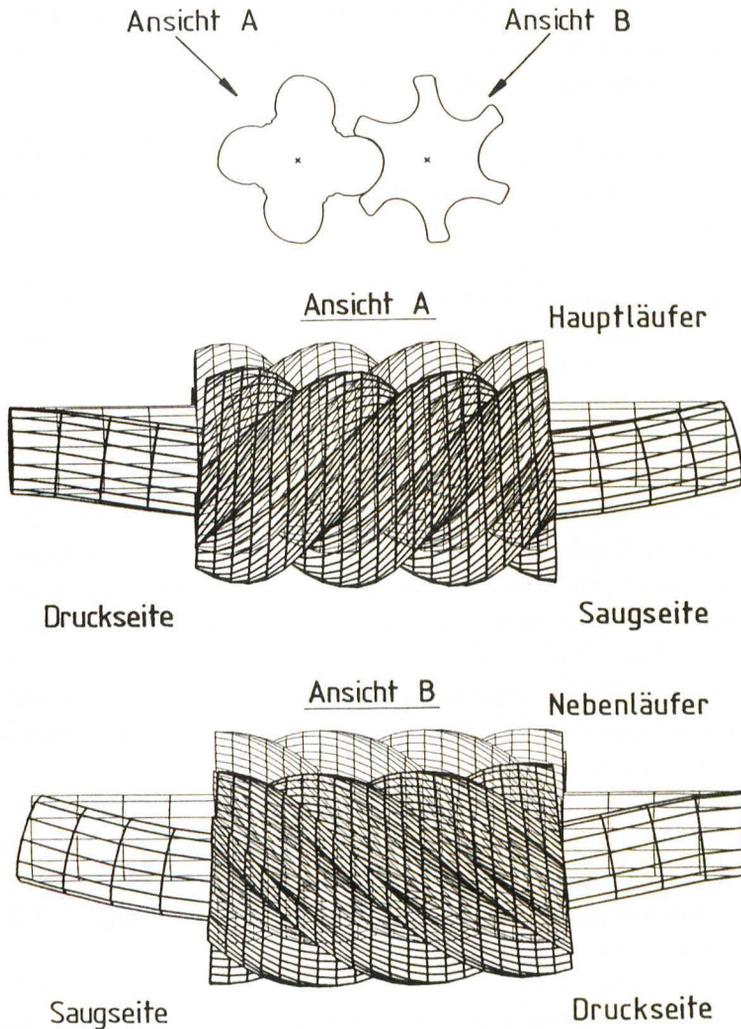


Bild 7: Verformungen unter Druckbelastung

Figure 7: Deformations by pressure load

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß es für die betrachteten Läufer ausreicht, die ersten beiden doppelten Biegeschwingungen und die erste Längsschwingung zu überlagern. Die Hinzunahme weiterer Eigenformen bringt keine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse.

Bild 7 zeigt die Knotenverschiebungen der betrachteten Rotoren unter einer reinen Druckbelastung. Aufgrund der hohen Verdichtungsdrücke im Kämbereich werden die Rotoren auseinandergedrückt. Die Läufer sind hier in den Ansichten A und B senkrecht zur Richtung der maximalen Durchbiegung dargestellt.

Die Verformung des Gehäuses durch die Druckbelastung läßt sich mit dem gleichen Verfahren aus der Überlagerung der Eigenformen berechnen. Schon die ersten beiden Eigenformen reichen hier aus.

Aus den Knotenverschiebungen durch die Druckbelastung ergeben sich zusammen mit den statischen Verformungsanteilen aus der Temperatur- und der Fliehkraftbelastung die Gesamtverschiebungsvektoren der Rotoren und des Gehäuses.

Die auf diese Weise ermittelten Verschiebungsvektoren ermöglichen zwar erste Rückschlüsse auf das Betriebsverhalten einer Maschine, lassen jedoch keine Aussage darüber zu, wie groß die Leckagespalte sind bzw. ob die Läufer in dem zugehörigen Gehäuse berührungsfrei rotieren. Entscheidend ist das kinematische Zusammenspiel der Läufer und des Gehäuses im Betrieb. So können z.B. schon geringe unterschiedliche axiale Dehnungen wegen der schraubenförmigen Verwindung der Rotoren zu Bauteilberührungen führen.

Mit einem speziellen Verfahren werden daher die Spiele zwischen den Läufern und dem Gehäuse unter Berücksichtigung der betriebsbedingten Verformungen berechnet.

Eine systematische Auswertung der zeitabhängigen Spielverläufe hat für das betrachtete Beispiel ergeben, daß die kleinsten Spiele zwischen den Bauteilen in einer Hauptläuferwinkelstellung von  $60^\circ$  auftreten. Aufgetragen über der Rotorachse sind in Bild 8 die Spiele zwischen dem Hauptläufer und dem Gehäuse, dem Nebelläufer und dem Gehäuse und die engsten Stellen im Profileingriff.

Insgesamt werden die Spiele zur Druckseite hin kleiner. Die kleinsten Spiele zwischen Hauptläufer und Gehäuse bzw. Nebelläufer und Gehäuse liegen bei  $51\ \mu\text{m}$  bzw.  $56\ \mu\text{m}$  gegenüber  $90\ \mu\text{m}$  im unverformten Zustand. Der minimale Abstand zwischen den Läufern beträgt in dieser Winkelstellung etwa  $41\ \mu\text{m}$  im letzten Stirnschnitt an der Druckseite.

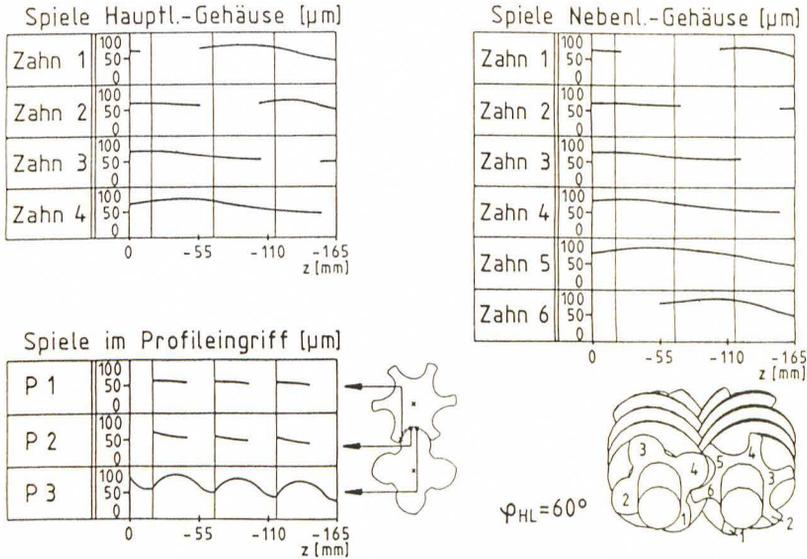


Bild 8: Spiele unter Betriebsbelastung  
 Figure 8: Clearances under working conditions

7. Variierte Profilformen SLF434 und SLF445

Das am Beispiel des asymmetrischen SRM-Profiles vorgestellte Berechnungsverfahren läßt sich nicht nur dann sinnvoll einsetzen, wenn Voraussagen über die Auswirkungen von Änderungen der Geometrie- oder Betriebsparameter zu treffen sind. Besonders hilfreich ist die rechnerische Simulation bei der Entwicklung und Optimierung neuer Profilformen, da eine umfassende und gezielte Parametervariation rein experimentell aus Kosten- und Zeitgründen nicht durchführbar ist.

Im folgenden sollen exemplarisch einige Ergebnisse aus der Berechnung des am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen entwickelten Profils SLF4 erläutert werden.

Aus der Vielzahl der möglichen Parametervariationen, die mit dem Profil SLF4 durchgeführt worden sind, haben sich zwei Läuferpaarungen als besonders geeignet herausgestellt (Bild 9), das Läuferpaar SLF434 mit 3 Hauptläufer- und 4 Nebentläuferzähnen sowie die Profilpaarung SLF445 mit 4 Hauptläufer- und 5 Nebentläuferzähnen.

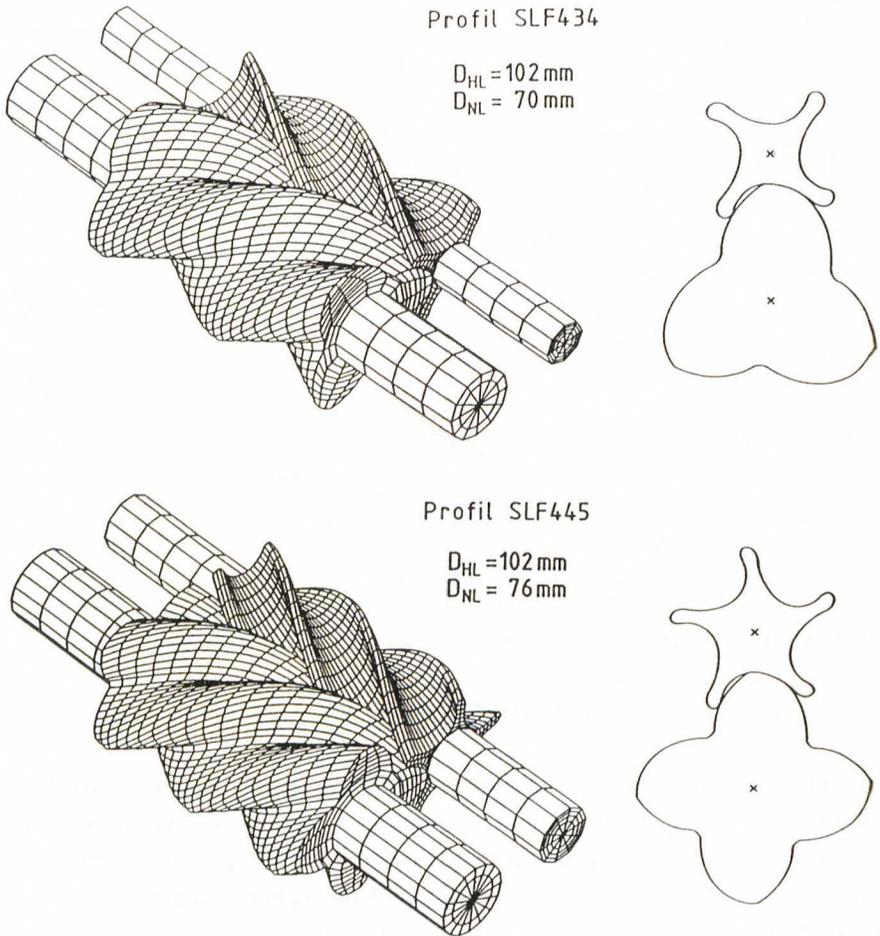
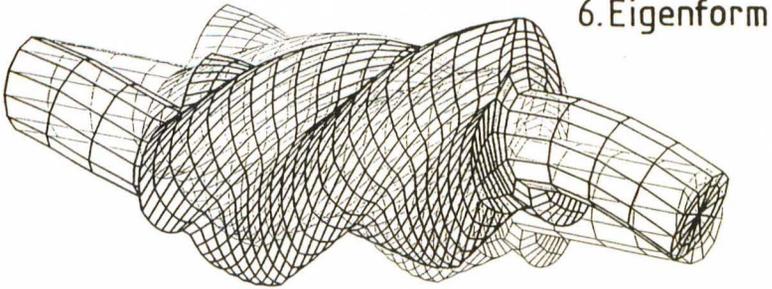
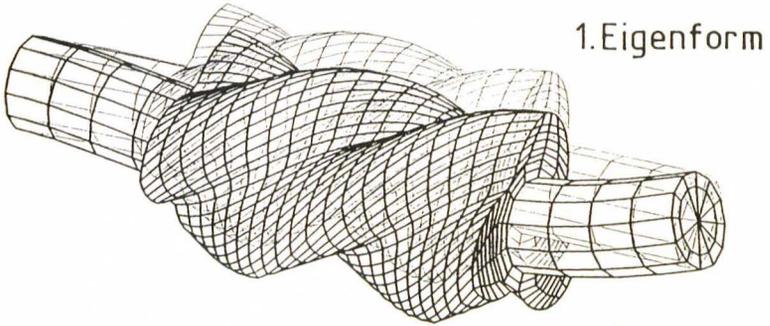


Bild 9: Läuferpaare SLF434 und SLF445  
 Figure 9: Rotor profiles SLF434 and SLF445

Bild 10 zeigt auszugsweise einige Eigenformen der Rotoren des Profils SLF434. Die ersten 10 Eigenfrequenzen der Nebenläufer beider Profilpaarungen sind im Vergleich zum asymmetrischen SRM-Nebenläufer in Bild 11 tabellarisch aufgelistet. Die Biegeschwingungen treten wiederum paarweise auf.

Bei den SLF4-Nebenläufern nehmen die Außen- und Kerndurchmesser im Vergleich zum SRM-Profil deutlich ab. Die Biegesteifigkeit verringert sich; die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen sind deshalb niedriger als beim SRM-Nebenläufer.

### Hauptläufer



### Nebenläufer

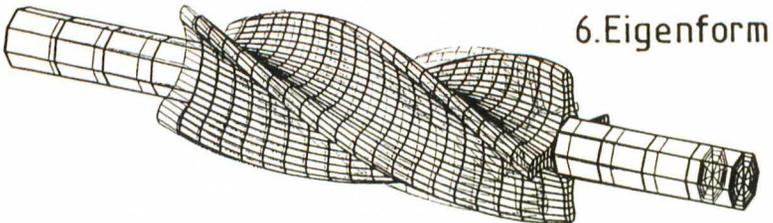
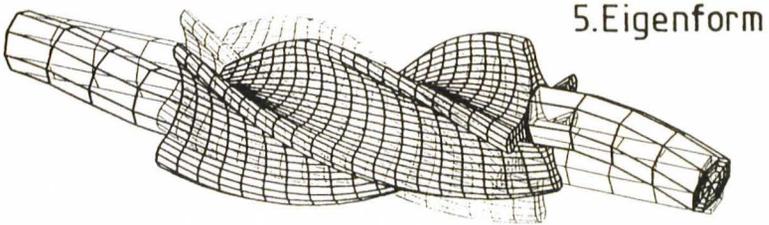


Bild 10: SLF434, Eigenformen  
Figure 10: SLF434, natural modes

Bild 11: Nebenläufer-  
Eigenfrequenzen SLF434,  
SLF445 und asym. SRM

Figure 11: Natural frequencies  
of female rotors SLF434,  
SLF445 and asym. SRM

Nr.	Nebenläufer-Eigenfrequenzen [Hz]		
	asym. SRM	SLF434	SLF445
1	940	715	902
2	940	715	902
3	1488	1777	2384
4	2752	2174	2759
5	2763	2174	2759
6	2763	3102	3242
7	6655	5003	5764
8	6655	5003	5764
9	7846	6246	7199
10	10815	8418	9419

Die erste Torsionsschwingung sowie die erste Längsschwingung dagegen treten bei höheren Frequenzen auf. Dabei liegt die erste Längsschwingung bei beiden Nebenläufern im Gegensatz zum SRM-Rotor über der zweiten Biegeschwingung.

Eine Anregung von Resonanzschwingungen durch die Ausstoßfrequenz ist ebenso wie beim SRM-Profil nicht zu erwarten.

Auch bei diesen Läuferpaaren reicht es zur Berechnung der Spiele aus, den ersten beiden Eigenformen die doppelt auftretende 2. Biegeschwingung und die 1. Längsschwingung zu überlagern.

Die zunehmende Schwingungsfähigkeit der gegenüber dem asymmetrischen SRM-Profil dünneren Nebenläufer des Profils SLF4 führt dazu, daß der Anteil an der Gesamtverformung, der aus der dynamischen Belastung durch die Druckkräfte resultiert, stark ansteigt.

Die Überprüfung der Spiele des Profils SLF445 ergibt, daß die kleinsten Spiele bei einer Hauptläuferwinkelstellung von 72° auftreten (Bild 12). Die Hauptläufer-Gehäuse-Spiele liegen in dieser Winkelstellung über der gesamten Läuferlänge zwischen 50 µm und 90 µm. Die kleinsten Nebenläufer-Gehäuse-Spiele betragen etwa 36 µm (Zahn 3). Im Profileingriff reduziert sich das kleinste Spiel auf 17 µm.

Beim Profil SLF434 treten die kleinsten Spiele in der Winkelstellung 96° auf (Bild 13). Die Hauptläufer-Gehäuse-Spiele liegen wie beim Profil SLF445 zwischen 50 µm und 90 µm. Die engsten Stellen zwischen dem Nebenläufer und dem Gehäuse betragen nur noch 13 µm (Zahn 2). Die minimale Distanz zwischen den Rotoren liegt bei 9 µm.

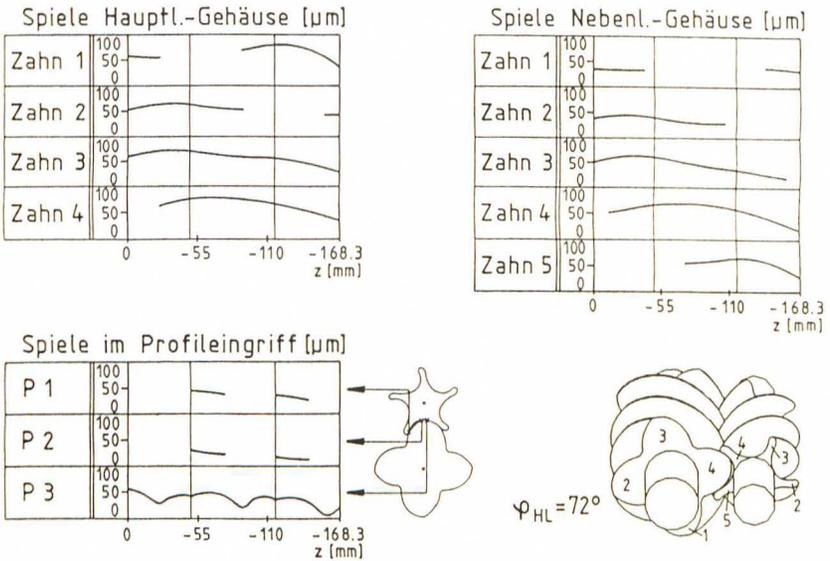


Bild 12: Spiele unter Betriebsbelastung (SLF445,  $\varphi_{HL} = 72^\circ$ )  
 Figure 12: Clearances under working conditions (SLF445,  $\varphi_{HL} = 72^\circ$ )

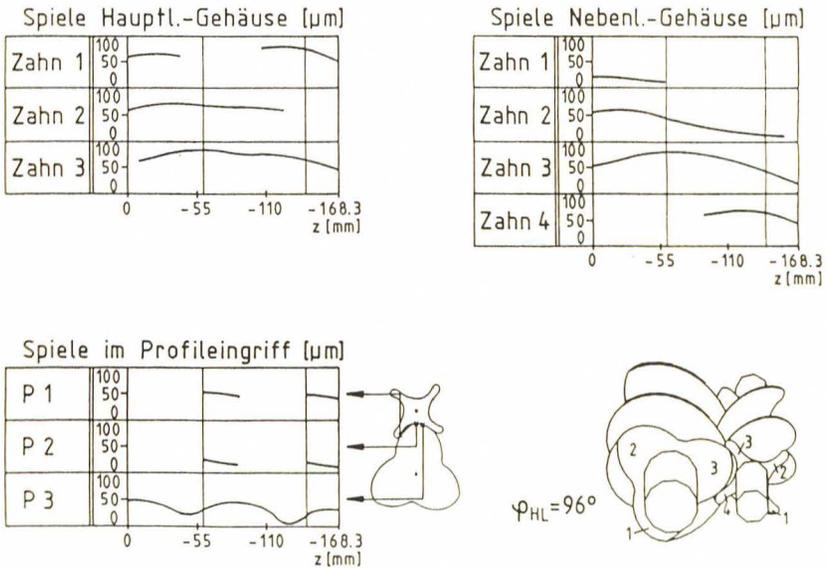


Bild 13: Spiele unter Betriebsbelastung (SLF434,  $\varphi_{HL} = 96^\circ$ )  
 Figure 13: Clearances under working conditions (SLF434,  $\varphi_{HL} = 96^\circ$ )

## 8. Schlußbetrachtung

Am Beispiel des asymmetrischen SRM-Profiles ist ein Verfahren zur Berechnung der Verformungen und Schwingungen sowie der engsten Stellen zwischen den Bauteilen von Schraubenmaschinen vorgestellt worden. Anschließend wurden Ergebnisse aus der Berechnung zweier variiertes Profilformen, SLF434 und SLF445, erläutert.

Für die vorgegebenen Betriebsdaten werden die Spiele besonders beim Profilpaar SLF434 sehr klein. Um die Betriebssicherheit zu gewährleisten, muß möglicherweise die Geometrie der Profilkonturen verändert werden. Dabei werden die Kaltspiele im unverformten Zustand so vergrößert, daß unter Betriebsbelastung ausreichende Abstände zwischen den Bauteilen vorhanden sind. Allerdings verschlechtern sich durch die größeren Spiele der Liefergrad und der polytrope Wirkungsgrad, so daß eine Korrektur der Läufer- oder Gehäusegeometrie eine erneute thermodynamische Berechnung notwendig macht.

## 9. Literatur

- /1/ Buthmann, P.: Rechnergestützte Schraubenverdichterprofilentwicklung und -rotorauslegung unter Berücksichtigung der betriebsbedingten Verformungen  
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1985)
- /2/ Neumann, G.: Berechnete, prozeßbeeinflussende Strömungsvorgänge in Schraubenverdichtern  
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1986)
- /3/ Bathe, K.-J.; Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis  
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976)
- /4/ Fölting, G.: Berechnung des dynamischen Bauteilverhaltens von Schraubenverdichtern unter Betriebsbelastung  
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1988)