

# Mathematische Simulation der dynamischen Eigenschaften der Schraubenkompressoren

J. Rosenberg, V. Zeman, P. Markov, Pilsen/CR

## Zusammenfassung

Das dynamische Modell des trockenlaufenden Schraubenverdichter wird untersucht. Mittels zwei verschiedenen Modellen wird die Modalanalyse der einzelnen Läufer sowie des gesamten Systems durchgeführt. Das vereinfachte 1D-FEM-Modell wird im Vergleich mit dem 3D-FEM-Modell verifiziert.

## Resumé

Dynamic model of screw compressor is studied. Modal analysis of rotors and of the whole compressor system is carried out using both 3D and 1D FEM model. The simplified 1D FEM model is thus verified.

## 1. Einleitung

Der vorgelegte Beitrag stellt die ersten Ergebnisse des Projekts "Verifizierung und Weiterentwicklung der instationären Simulation von Schraubenmaschinen" vor, die auf dem Lehrstuhl der Mechanik der Westböhmisches Universität in Pilsen erreicht worden sind, vor. Das gemeinsam mit dem Lehrstuhl der Fluidenergiemaschinen der TU Dortmund verwirklichte Projekt entstand in Rahmen der Volkswagenstiftung "Zusammenarbeit mit Natur- und Ingenieurwissenschaftlern in Mittel- und Osteuropa" und wir danken herzlich dem VW - Konzern für diese Unterstützung.

Ziel des Projekts ist die Entwicklung eines verifizierten mathematischen Modells der Schraubenmaschine und zwar auch in instationären Zuständen. Die WBU Pilsen konzentriert sich dabei auf die Modellierung der Dynamik bei den s.g. trockenlaufenden Schraubenverdichtern. Das Endziel ist die Bestimmung des Zeitverlaufes der Spaltdicke zwischen den Läufern und zwischen dem Läufer und dem Gehäuse.

Es handelte sich um ein extrem kompliziertes Problem weil die Spaltdicke durch folgenden Erscheinungen beeinflusst wird:

- Die von einem instationären Temperaturfeld verursachten Wärmedeformationen.
- Statische Deformationen von dem Druck in Medium.
- Die dynamischen durch Unwucht der Läufer und durch den zeitlich veränderlichen Druck im verdrängten Medium erregten Verformungen.

Das ganze System hat dabei folgende Grundmerkmale:

- Es besteht aus mehreren deformierbaren Körpern (Nebenläufer NL, Hauptläufer HL, Antriebswelle AW, Zahnräder, Gehäuse - siehe Abb.1), die sehr komplizierte Form haben.
- Mehrere Teile sind nachgiebig gelagert.
- Die Läufer und die Antriebswelle sind mit der schrägverzahnten Zahnrädern gekoppelt, die veränderliche Steifigkeit haben.

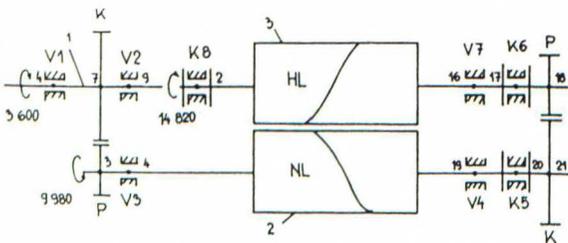


Abb.1. Das Schema des dynamischen Verdichtersystems.  
Schema of dynamic compressor system

Die Aufgabe wird in der Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl der Fluidenergiemaschinen der TU Dortmund gelöst, wobei besonders die dort errechnete Druckverläufe und Wärmeverteilung von uns übernommen worden sind.

Die eigene Modellierung des Schraubenverdichters als eines dynamischen Systems wurde in folgende Teilaufgaben verteilt:

- a) Modalanalyse der einzelnen Glieder
- b) Modalanalyse des Systems von beiden Läufern und der Antriebswelle
- c) Die erregten Schwingungen des Systems ad b)
- d) Die erregten Schwingungen des ganzen Systems (ad b) mit dem Einfluss der Nachgiebigkeit des Gehäuses)
- e) Die Aufgaben ad c) und ad d) mit den thermischen Deformationen
- f) Trimmung und Optimierung des Systems.

Im vorgelegten Beitrag werden die Ergebnisse der Aufgaben a) und b) dargestellt. Diese erlauben zwar keine Bestimmung der Spalthöhe, bedeuten aber notwendigen Schritt der kompletten Analyse. Hier werden die entsprechenden Modelle entwickelt, wobei die Eigenfrequenzen und Eigenformen die ersten wichtigen Hinweise für die Auslegung des Verdichters geben.

Auf Grund dieser Aufgaben werden auch die zwei verwendeten Modellierungsmethoden - das s.g. 3D- und 1D- FEM - Modell getestet.

Das 3D-FEM-Modell stellt die Verwendung der kommerziellen FEM-Paketten mit räumlichen Elementen dar.

Das 1D-FEM-Modell entstand als Resultat der Bestrebungen um wesentliche Vereinfachung der 3D-FEM-Modellen, die zu hohe Zahl der Freiheitsgraden besitzen und deswegen für die Modellierung des ganzen Systems und für seine Trimmung und Optimierung auf der zugänglichen Hardware nicht besonders ge-

eignet sind. Der weitere wichtige Grund ist, daß im 3D-FEM-Modell die Einbeziehung der gyroskopischen Effekte und der Kopplung zwischen der Antriebswelle und beiden Läufern sehr schwierig im Vergleich mit dem 1D-FEM-Modell ist. Es handelte sich um einen ganz originellen Zutritt zu dieser Problematik wobei die Verifizierung auch ein Ziel des ersten Projektteils war.

## 2. Bildung der mathematischen Modelle der Rotoren mit nachgiebigen Lagern

### 2.1. 3D-FEM-Modell

Beide Läufer des Verdichters wurden mit Hilfe der Brick-Elementen modelliert. Jedes Element hat dabei 8 Knoten. Für Meshing wurde die spezielle Procedure von TU Dortmund verwendet und das entstandene Modell wurde dann in Pilsen mit Hilfe der Procedure CHECK von FEM-Paket SYSTUS mit gutem Ergebniss geprüft. Das ganze Modell der einzelnen Glieder hat je etwa 10 000 Freiheitsgraden.

Als Randbedingungen für die Modalanalyse mußte man die Lagersteifigkeiten bestimmen. Dazu verwendeten wir das auf dem Lehrstuhl der Mechanik in Pilsen entwickelte Software.

### 2.2. 1D-FEM-Modell

Die Läufer und die Antriebswelle wurden mit Hilfe von Knoten auf die Wellenelemente mit der kontinuierlichen Masse und auf die diskreten Elemente (Scheiben und nachgiebige Stütze) zerlegt. Jeder auf der Achse liegende Knoten hat während der räumlichen Schwingungen 6 Freiheitsgraden die mit dem Vektor der verallgemeinerten Verschiebungen (Abb. 2)

$$\mathbf{q}_1(t) = [ \bar{u}, \bar{v}, \psi, \bar{w}, \vartheta, \varphi ]_1 \quad (1)$$

beschrieben werden.



$$\left. \begin{matrix} M \\ G \\ K_S \\ K_D \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \text{Matrix 1} \\ \text{Matrix 2} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Matrix 3} \\ \text{Matrix 4} \end{array} \right] \quad (3)$$

Die Matrizen der Wellenelemente sind dabei in den schrafierten Blöcken der Ordnung 12 der ersten Matrix lokalisiert worden. Die zweite Matrix in (3) entspricht den diskreten Elementen in einzelnen Knoten, wobei die Lokalisierung in den schrafierten Blöcken der Ordnung 6 der Position des bezüglichen Vektors  $\mathbf{q}_1(t)$  im Vektor der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t)]$  des Systems entspricht. Der Einfluss der Winkelgeschwindigkeit des Läufers  $\omega_0$  ist aus dem Modell (2) ersichtlich.

NEBENLAUFER					
1D - MODELL					3D
$\nu$	$\Omega$ [rad/s]	$f$ [Hz]	Form.	Char.	$f$ [Hz]
1	0	0	T		0
2	2113	336	L	P, V3, NL	350
3	3896	620	B	NL, K	728
4	3896	620	B	NL, K	728
5	5768	918	B	K, NL	1127
6	5768	918	B	K, NL	1127
7	7856	1250	T	K, P	1409
8	13531	2153	B		1995
9	13531	2153	B		1995
10	14871	2367	B		3770

Tab. 1. Eigenfrequenzen und -formen des Nebenläufers  
 (B-Biegung, T-Torsion, L-Längsschwingungen)  
 Eigenfrequencies and eigenvectors of femal rotor  
 (B-bending, T-torsion, L-longitudinal vibration)

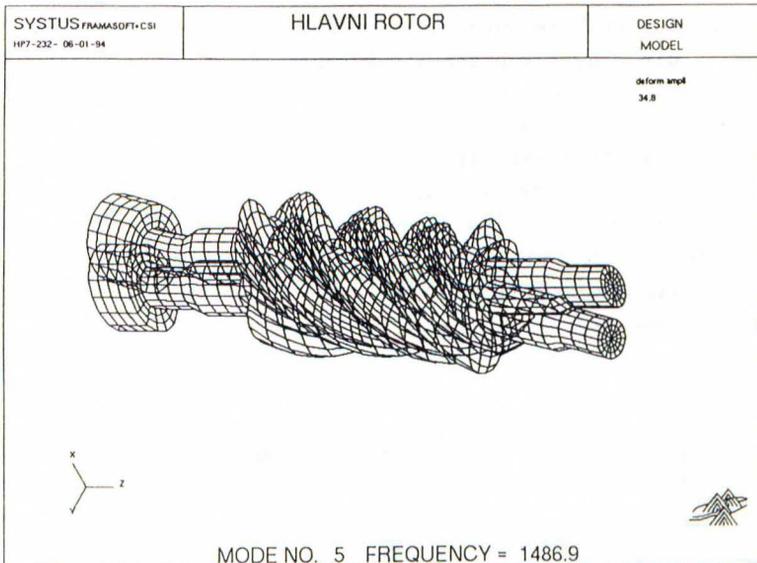


Abb. 3. Die 5. Eigenform des Hauptläufers  
5-th eigenvector of male rotor

### 3. Modalanalyse der Läufer und der Antriebswelle

#### 3.1. Modalanalyse der 3D-Variante mit SYSTUS

Die Modalanalyse wurde mittels der Lanczo - Methode mit SYSTUS durchgeführt. Ein Beispiel der festgestellten Eigenformen ist auf der Abb. 3 dargestellt. Numerische Ergebnisse sind dann als Beispiel für den Nebenläufer in der Tabelle 1. eingetragen. Genaue Diskussion der Ergebnissen ist in [1] zu finden. Es sollte betont werden, daß die verwendeten Randbedingungen den nachgiebigen Lagern entsprechen.

### 3.2. Modalanalyse der 1D-Variante - Vergleiche und Auswertung

Bei der Modalanalyse wurden die Rotationsträgheit der eigenen Wellen, die gyroskopischen Effekte und die Dämpfung vernachlässigt. Die Eigenfrequenzen und die ersten 10 Eigenvektoren vom NL sind als Beispiel in der Tabelle 1. angeführt. Als Beispiel ist die 3.(4.) Biegungseigenform des Nebenläufers in der Abb.4. dargestellt. Aus dieser Abbildung kann man sofort feststellen, welche Teile der Läufer vorwiegend bei der einzelnen Frequenzen schwingen. Die Numern auf der waagerechten Achse bestimmen die genaue Lage der entsprechenden Verschiebungen.

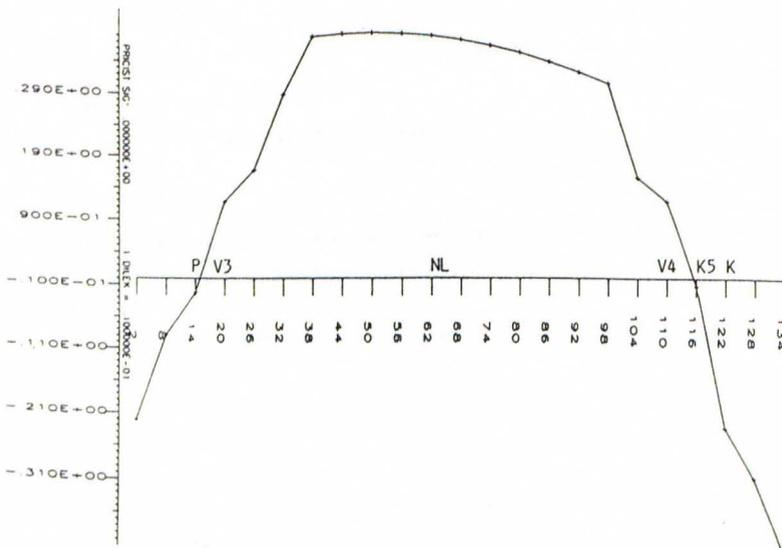


Abb. 4. 3.(4.) Biegungseigenform des Nebenläufers  
3.(4.) flexural mode of vibration of femal rotor

Wenn wir jetzt die Eigenfrequenzen und Eigenformen des 1D- und 3D-Modells vergleichen, kommen wir zu den folgenden

Schlussfolgerungen:

- a. Die Differenzen der Eigenfrequenzen von beiden Modellen im Frequenzbereich bis 2000 Hz sind ganz zulässig.
- b. Die Unterschiede sind nicht nur durch die Dimension des verwendeten Kontinuums (1D bzw. 3D), sondern auch durch die Art der Diskretisierung beeinflusst. In 1D-Modell "hängen" die diskreten Massenparameter auf der Welle und deswegen erhöhen die Biege-, Torsion- und Längssteifigkeit der Wellen nicht. In 3D-Modell sind wieder die Zahnräder und die Welle als ein Stück von Material modelliert, was der Realität nicht ganz entspricht.

Weil als Schlußziel der dynamischen Analyse die Profiländerungen sind, die durch die dynamischen Effekte verursacht werden, wurde weiter ein Programm entwickelt, das die Umrechnung der Knotenverschiebungen und -drehungen auf der Achse auf die Oberfläche des Läufers ermöglicht.

#### 4. Modalanalyse des Systems

Das mathematische Modell des Systems vom Läufer und der Antriebswelle kann in folgender Form geschrieben werden:

$$M_j \ddot{q}_j(t) + (B_j + \omega_{o_j} G_j) \dot{q}_j(t) + (K_{s_j} - \omega_{o_j}^2 K_{D_j}) q_j(t) = f_j^c \quad (4)$$

wo das Index  $j=1$  der Antriebswelle,  $j=2$  dem NL und  $j=3$  dem HL entspricht. Die Kopplung zwischen der AW und den Läufern durch die Verzahnung ist durch den Vektor  $f_j^c$  der Dimension  $6N_j$  gegeben. Die Freiheitsgradenzahl des Systems ist dann  $n = \sum_{j=1}^3 6N_j$ . Auf Grund der Methode der Modalsynthese und der Kondensation, die in [2] beschrieben wird, kann man das Modell

(4) mittels der spektralen und modalen Submatrizen  ${}^m \Lambda_j \in \mathbb{R}^{j \times j}$  und  ${}^m \mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^{n \times j}$  der isolierten AW, NL und HL in folgender kondensierte Form der Ordnung  $m = \sum_{j=1}^3 m_j$  ( $m < n$ ) darstellen:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}_c \mathbf{V}) \dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V}) \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Diese Gleichung stellt die Schwingungen des Systems im Konfigurationsraum der modalen Koordinaten  $\mathbf{x}(t)=[\mathbf{x}_j(t)]$  der ausgewählten s.g. master Eigenformen der isolierten AW und Läufer dar. Zwischen den Vektoren  $\mathbf{q}(t)=[\mathbf{q}_j(t)]$  der verallgemeinerten Verschiebungen von allen Knoten des Systems,  $\mathbf{f}^c=[\mathbf{f}_j^c]$  der Kopplungskräfte und  $\mathbf{x}(t)$  gibt es folgende Transformationsbeziehungen

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{f}^c = - [\mathbf{K}_c \mathbf{V} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}(t)] \quad (6)$$

die die Bestimmung der Zeitabhängigkeit der verallgemeinerten Knotenverschiebungen nach der Integration von (5) ermöglichen. Im Modell (5) haben wir die Blockdiagonalmatrizen

$$\mathbf{D} = \text{diag}({}^m \mathbf{V}_j^T \mathbf{B}_j, {}^m \mathbf{V}_j), \quad \mathbf{G} = \text{diag}(\omega_{o_j}, {}^m \mathbf{V}_j^T \mathbf{G}_j, {}^m \mathbf{V}_j), \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}({}^m \mathbf{\Lambda}_j), \\ \mathbf{v} = \text{diag}({}^m \mathbf{V}_j)$$

und die Matrix der Steifigkeit  $\mathbf{K}_c$  sowie der Dämpfung  $\mathbf{B}_c$  der Kopplungen zwischen AW, HL und NL eingeführt. Diese hängen von den geometrischen Parametern der Zahnräder, der Steifigkeit und Dämpfung der Verzahnung und von der Knotenreihenfolge, in der die Zahnräder zu der Welle befestigt sind, ab.

Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen des Systems vernachlässigen wir die Rotationsträgheit der eigenen Wellen, die gyroskopischen Effekte und die Dämpfung. Das kondensierte Modell (5) bekommt dann die Form

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V}) \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7)$$

Die Eigenfrequenzen des Systems  $\Omega_\nu$ ,  $\nu=1,2,\dots,m$  sind direkt mit den Eigenfrequenzen des kondensierten Modells (7) bestimmt. Die Eigenvektoren  $\mathbf{x}_\nu$  von der Dimension  $m$  des kondensierten Modells müssen wir laut (6) auf die Eigenvektoren  $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{V} \mathbf{x}_\nu$  des Systems (Dimension  $n$ ) transformieren.

Mit Hilfe der Jacobi-Methode wurden die Eigenfrequenzen und die ersten 10 Eigenvektoren für einige Alternativen der kondensierten Modelle berechnet. Die Unterschiede sind sehr gering. Als vernünftige Alternative für die Modalanalyse des Systems und die Untersuchung der erregten Schwingungen nehmen wir die mit der Freiheitsgradenzahl  $m = 19+35+26 = 80$ .

Die ersten 10 Eigenfrequenzen mit der Charakterisierung der Eigenformen sind in der Tabelle 2. angeführt. Wegen der Kopplungen entstehen die neuen Eigenformen, die den relativ

$\nu$	SYSTEM		
	Eigenfrequenzen		Form
	$\Omega$ [rad/s]	$f$ [Hz]	
1	0	0	L + T
2	0	0	T + L
3	1789	285	T / NL + HL
4	2263	360	T / NL + HL
5	2756	439	T / NL + HL
6	3891	619	B / NL
7	4084	650	B / NL + HL
8	5409	861	B / HL
9	5421	863	B / HL + NL
10	5765	918	B / NL + AW

Tab. 2. Eigenfrequenzen und Eigenformen des Systems  
Eigenfrequencies and eigenvectors of system

niedrigen Eigenfrequenzen  $\Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$  mit vorwiegenden Torsionschwingungen entsprechen. Damit sind am meisten die Wellenteile betroffen. Die Formen mit vorwiegenden Biegungsschwingungen liegen, was die Frequenzen angeht, sehr nah, sind aber nicht identisch, wie bei den isolierten Läufer der Fall war ( Tab. 1. ). In einigen Frequenzpaaren schwingt deutlich nur ein Läufer (NL in der 6. Form, HL in der 8. Form). Die entsprechende Biegungsform ist dann, was die Frequenz und Form angeht, fast identisch mit der Biegungsform des isolierten Läufers.

## 5. Schlußfolgerung

Im Beitrag wurden zwei verschiedene Zugänge zur Modellierung des dynamischen Systems des Schraubenverdichters vorgestellt. Die angeführten Ergebnisse dokumentieren die Möglichkeit der Verwendung des wesentlich einfacheren 1D-FEM-Modells mindestens für die Modalanalyse des Systems und seine Optimierung. Das in dieser Phase des Projekts entwickelte Software ermöglicht die dynamisch höchstbelasteten Stellen zu bestimmen und das ganze System nach Frequenzen zu bewerten.

Zum Schluss möchten wir nocheinmal dem Konzern VW für die Unterstützung danken, die uns sich dieser Problematik zu widmen und das entsprechende Hardware dazu zu verwenden ermöglichte.

Unser Dank gilt gleichzeitig Herrn Prof. Kauder, ohne dessen Hilfe es zu dieser Zusammenarbeit nie kommen würde.

## Literatur

- [1] Markov, P.: Frequenz- und Modalanalysis der Rotoren des Schraubenverdichters .Forschungsbericht ,Pilsen/Dortmund 1994.
- [2] Zeman, V.: Vibration of Mechanical Systems by the Modal Synthesis Method. ZAMM-Z. angew. Math. Mech. 74(1994)4, T99-101
- [3] Zeman, V., Rosenberg, J., Nemecek, J., Dupal, J., Albl, P.: Dynamik der Schraubenverdichter. Forschungsbericht, Pilsen/Dortmund (in Vorbereitung)
- [4] Kauder, K.: Entwicklungsprobleme von Schraubenladern. Vortrag TU-Wien, 1992.
- [5] Rinder, L.: Schraubenverdichter. Springer Verlag, Wien 1979.