

Modellierung der Verlustfläche bei dem Eingriff der Rotoren der Schraubenmaschinen

Doz. Dr.-Ing. J. Svigler, Dipl.-Ing. J. Vimmr, Pilsen/Czech. Republic

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die neue Modellierung der Verlustlücke bei dem Eingriff der Rotoren der Schraubenmaschinen dargestellt.

Abstract

In this article the new formulation of the gap in the course of teeth mesh of the screw machine rotors is presented.

1. Einleitung

Der Arbeitsraum, in den das Medium eingesaugt und darauffolgend verdichtet oder expandiert wird, wird durch zwei Kammern (Bild 1) gebildet und stellt einen wichtigen Bestandteil der Schraubenmaschine dar. Dieser Arbeitsraum, der eine komplizierte

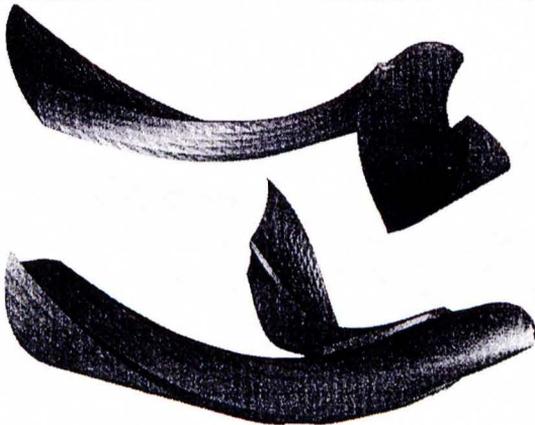


Bild 1 Arbeitsraum der Schraubenmaschine

nichstationäre Form besitzt und von dem die Betriebsparameter abhängig sind, ist durch die Zahnflächen und die innere Gehäusefläche begrenzt. Das mathematische Modell des Arbeitsraumes wird mit Hilfe der Beziehungen (1) beschrieben /1/. Die erste Beziehung

beschreibt die Transformationsgleichungen und die zweite ist die Berührungsbedingung der eingreifenden Flächen. In beiden Gleichungen stellt

$$\begin{aligned}
 {}_{R_i}r_L &= T_{R_i R_e}^T(\varphi_i) T_{R_e R_e} T_{R_e R_e}(v) T_{R_e R_e}(\varphi_i) {}_{R_i}r_L, \\
 T_{R_i R_e}(\varphi_i) {}_{R_i}n_L \left[\Omega_i T_{R_i R_e}(\varphi_i) {}_{R_i}r_L - T_{R_i R_e} \Omega_j T_{R_e R_e} T_{R_i R_e}(\varphi_i) {}_{R_i}r_L \right] &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

T die Transformationmatrix und Ω die antisymmetrische Matrix der Winkelgeschwindigkeit ω dar. Die Arbeitsraumundichtigkeit bildet eine Quelle unerwünschter Schraubenmaschinenverluste, wobei es eine wichtige Rolle spielt, daß die Zahnflächen aufgrund der im stationären Gehäuseraum drehenden Rotoren den Arbeitsraum nicht vollständig abschließen können. Diese Schließunfähigkeit entsteht dadurch, daß die ineinandereingreifenden Zahnflächen durch Kopfübergangsflächen begrenzt sind, die sich nicht berühren, sodaß der Flächeneingriff in einer gewissen Entfernung vor den inneren Zylinderflächen einzelner Rotoren endet. An dieser Stelle kommt es zu einer Verbindung der mit unterschiedlichem Druck beaufschlagten Nachbarkammern, was einen Volumen- und Druckverlust in der Kammer höheren Druckes verursacht. Diese Situation ist in Bild 2 dargestellt, in dem die einzelnen axialvershobenen

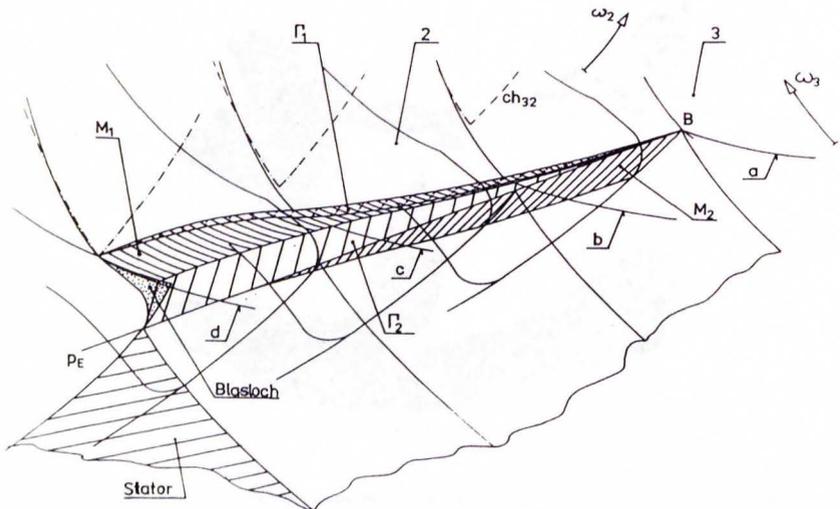


Bild 2 Verlustraum bei der Schraubenmaschine

Stirnschnittebenen veranschaulicht werden. In der Position „a“ verläßt der Zahn des Hauptrotors die Gehäusekante und die Lücke beginnt zu entstehen. In der Position „d“ ist der Abstand des Hauptrotorzahnes von der Gehäusekante am grössten und gleichzeitig tritt die Berührung der beiden Zähne ein. Die Lücke wird geschlossen. Diese Position dient zur Zeit zur Berechnung der Größe der Verlustfläche der Lücke /2/. Als die Verlustfläche bezeichnet man in den derzeitigen Berechnungen die Projektion der Fläche, die im Stirnschnitt durch das Profil des Nebenrotorzahnes, der Gehäusezylinderlinie und der gedachten Kurve, die das Profil des Hauptrotorzahnes ersetzt, begrenzt wird, in die Ebene, die senkrecht auf dem Tangentenvektor der Schraubenlinie durch den Punkt der Nebenrotorzahnfläche steht. Dieses Verfahren geht hier von der Voraussetzung aus, daß der Mittelgeschwindigkeitsvektor des durch die Zahnücke fließenden Mediums kollinear mit dem Tangentenvektor der durch den gewählten Punkt der Nebenrotorzahnfläche verlaufenden Schraubenlinie ist. Für die Größe dieser Verlustfläche, die als wirksame Blaslochfläche /2/ bekannt ist wird in /3/ ein einfacher explizierter Ausdruck angegeben:

$$\begin{aligned}
 S = \sum_{i=1}^6 S_i = \frac{1}{2} \sin \mu d \left[-r_{21} (\psi_4 + \psi_5) + r_{w2} \sin(\psi_4 + \psi_5) \right] - \\
 -r_{a2}^2 (\psi_6 - \psi_4) + r_2^2 (\psi_6 - \psi_{21}) + (\psi_{2N_2} - \psi_{2B_2}) \left(a_w^2 + d^2 \left(\frac{z_2 + z_3}{z_3} \right) \right) - \\
 -a_w d (\psi_{2N_2} - \psi_{2B_2}) \left(\frac{z_2 + 2z_3}{z_2} \right) \left(\sin \frac{z_2}{z_3} \psi_{2N_2} - \sin \frac{z_2}{z_3} \psi_{2B_2} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung bezeichnen ψ_i, r_j, a_w, d direkt die geometrischen Parameter oder die Funktionen der geometrischen Parameter und der Rotorwinkelstellung, z_2, z_3 bezeichnen die Anzahl der Neben- und Hauptrotorzähne. Die numerische Auswertung der Gleichung (2) wurde für die Schraubenrotoren mit dem asymmetrischen SRM - Profil mit folgenden Parametern durchgeführt:

Achsabstand $a_w = 150$ mm

Anzahl der Hauptrotorzähne $z_3 = 4$

Anzahl der Nebenrotorzähne $z_2 = 6$

Steigungswinkel $\gamma_2 = \gamma_3 = 45^\circ$

Radius der Kopfkreislinie des Hauptrotors $r_{a3} = 65$ mm

Radius der Kopfkreislinie des Nebenrotors $r_{a2} = 62$ mm

Die Blaslochfläche in der Stirnschnittebene ist in Bild 3 und die wirksame Blaslochfläche ist in Bild 4 dargestellt. Hier ist der Spalt zwischen dem Zahnkopf des Nebenrotors und dem Gehäuse angesetzt.

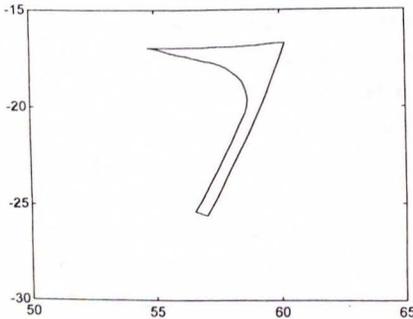


Bild 3 Blaslochflächenform
in der Stirnschnittebene

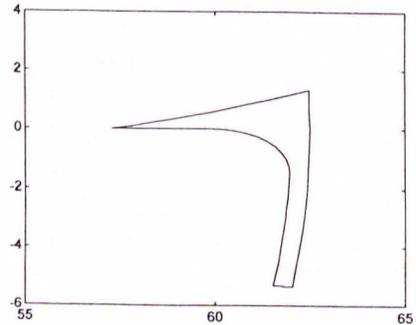


Bild 4 Form der wirksamen
Blaslochfläche

2. Verlustraum

Aus Bild 2 wird ersichtlich, daß es zum Verlust des Gases auch in der Richtung entlang der Koordinatenachse z kommt und daß die Lücke gleichzeitig zwischen mehreren Flächen geschaffen wird. Es ist deshalb besser von einem Verlustraum als von einer Verlustfläche zu sprechen. Für die Erstellung des mathematischen Modells des Verlustraumes, der eine Basis für die Berechnung der Verluste bildet, war es unvermeidlich fiktive Flächen $\Gamma_1, \Gamma_2, X_1, X_2$ (Bild 2) einzuführen. Diese gedachten Flächen ermöglichen eine solche Modellierung der Verlusträume, daß eine einfache Berechnung der Verluste möglich wird. Eine notwendige Bedingung für die Benutzung dieses Modelles ist die Beschreibung aller gedachten oder realen Flächen mit Hilfe des parametrischen Verfahrens. Dazu wird ein zweiparametrisches Netz auf den Flächen, die den Verlustraum begrenzen, benötigt.

Hauptverlustflächen

Die Flächen Γ_1, Γ_2 (Bild 2) sind die fiktiven Flächen, die den Verlustraum begrenzen und eine maßgebende Bedeutung nicht nur für die Bildung dieses Raumes haben sondern auch für die Beurteilung des Verlustes, der durch den Verlustraum verursacht wird.

Fläche Γ_1

Die Regelfläche Γ_1 wird aus einer Menge von Senkrechten gebildet, die aus den Punkten der Schraubenlinie des Punktes B (Bild 5) auf die Kopfzahnfläche des Nebenrotors gefällt wurden. Die Schraubenlinie des Punktes B bildet auf der Kopfzahnfläche des Hauptrotors eine Kante, in der beide Zahnflächen des Hauptrotors sich berühren. Die Gleichung der Fläche Γ_1 (Bild 5) im Grundraum $R \equiv (x, y, z)$ ist

$${}^R\vec{r}_L = {}^R\vec{r}_K + {}^R\vec{n}_K q_1 \tag{3}$$

wobei q_1 der Parameter ist, der die Lage des allgemeinen Punktes L der Senkrechte beurteilt und \vec{n}_K den Einheitsvektor der Normale zur Zahnkopffläche des Nebenrotors beschreibt, für den gilt

$${}^R\vec{n}_K = \frac{{}^R\vec{t}_1 \times {}^R\vec{t}_2}{{}^R|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2|} \tag{4}$$

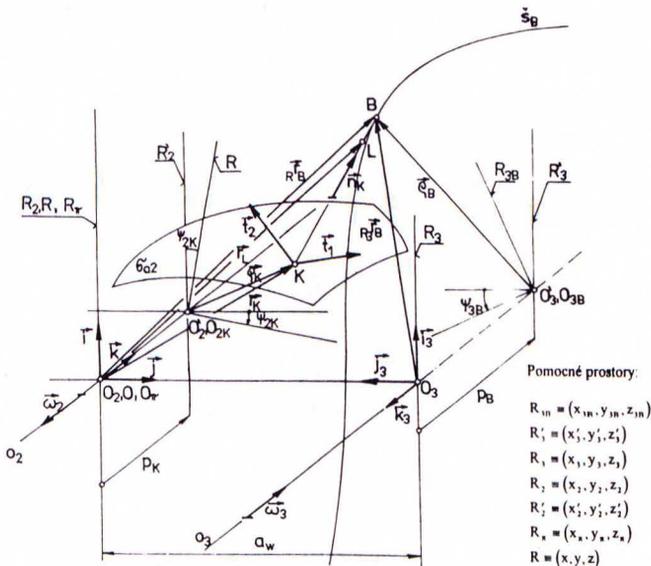


Bild 5 Ausbildung der Regelverlustfläche Γ_1

Im Fall, daß $L \equiv B$ (Bild 5) ist, gilt die Beziehung ${}_R\vec{t}_L = {}_R\vec{t}_B$ und der Parameter q_1 erreicht seinen Grenzwert $q_1 = q_{10}$. Die Gleichung (3) geht dann auf die Identität

$${}_R\vec{r}_B = {}_R\vec{r}_K + {}_R\vec{n}_K q_{10}, \quad (5)$$

die die Zielfunktion für die Unbekannten $\psi_{2K}, \psi_2, q_{10}$ mit dem Parameter p_B darstellt über. Der Winkel ψ_2 gehört zu den Polarkoordinaten des Profilpunktes. Die Lösung der Zielfunktion wurde durch die Bestimmung eines Minimums der Funktion mit mehreren Veränderlichen mittels des Nelder-Meadovalgorithmus, der auf der Simplexmethode gegründet ist, durchgeführt. Mit der Substitution des Parameters p_B durch den allgemeinen Parameter p ist die Gleichung (3) eine Parametergleichung der Regelfläche Γ_1 .

Fläche Γ_2

Die Regelfläche Γ_2 entsteht aus der einparametrischen Menge der Senkrechten, die aus den Punkten der Geradenkante des Gehäuses (Bild 6) auf die Fläche des Kopfzahnes des Hauptrotors σ_{a3} gefällt werden. Die Gleichung der Fläche Γ_2 im Grundraum R wird durch die Beziehung

$${}_R\vec{r}_L = {}_R\vec{r}_E + {}_R\vec{n}_N q_2 \quad (6)$$

bestimmt. Für den Einheitsvektor der Senkrechten, die eine Normale zur Fläche σ_{a3} ist, gilt

$${}_R\vec{n}_N = \frac{{}_R\vec{t}_3 \times {}_R\vec{t}_4}{{}_R\vec{t}_3 \times {}_R\vec{t}_4}. \quad (7)$$

Wenn wieder $L \equiv N$ (Bild 7) wird, gilt ${}_R\vec{r}_L = {}_R\vec{r}_N$ und der Parameter q_2 erreicht seinen Grenzwert $q_2 = q_{20}$. Die Gleichung (6) geht dann auf die Identität

$${}_R\vec{r}_N = {}_R\vec{r}_E + {}_R\vec{n}_N q_{20}, \quad (8)$$

die die Zielfunktion für die Unbekannten χ_3, p_E, q_{20} , mit dem Parameter p_N darstellt über. Der Winkel χ_3 ist der Hilfswinkel der Drehung des Hauptrotors bei der Gestaltung des

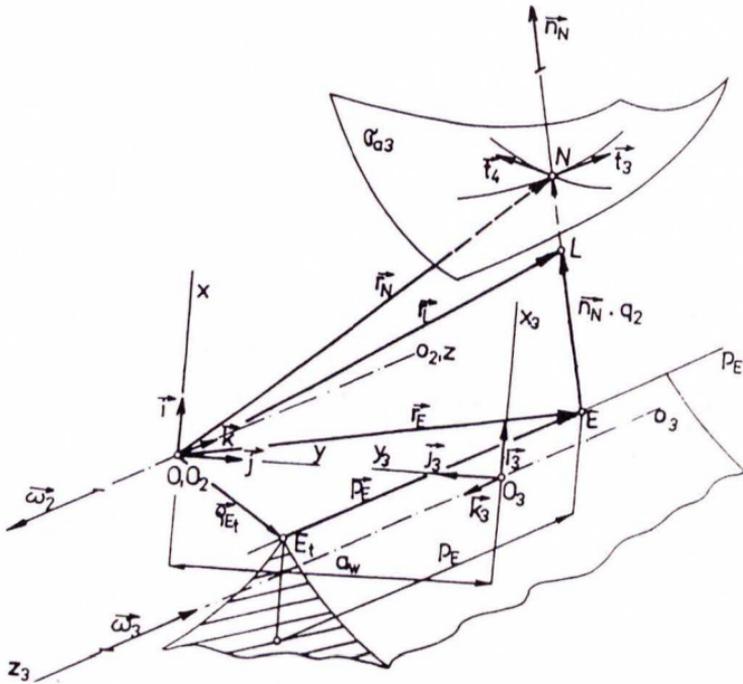


Bild 6 Ausbildung der Regelverlustfläche

Zahnkopfform des Hauptrotors. Mit der Substitution des Parameters ρ_N durch den allgemeinen Parameter p ist die Gleichung (6) die Parametergleichung der Regelfläche Γ_2 .

Verdeckflächen

Die Verdeckflächen M_1, M_2 (Bild 2) sind im Unterschied zu den gedachten Flächen Γ_1, Γ_2 , die realen Flächen, die durch die Zahnflächen des Neben- und Hauptrotors und die Fläche des Zylindergehäuses der Schraubenmaschine ausgebildet werden. Die Verdeckflächen nehmen nicht an der Ausströmung von Gas aus dem Arbeitsraum teil.

Fläche M_1

Die Fläche M_1 (Bild 7) wird durch einen Teil der Fläche des Kopfbahns des Hauptrotors σ_{a3} gebildet und wird mittels der Gleichung (9) gegeben. Die Fläche M_1 wird auf der Zahnfläche σ_{a3} durch die Grenzkurven $h_1^{M_1}, h_2^{M_1}, h_3^{M_1}$ begrenzt. Die Kurve $h_1^{M_1}$ ist die Schraubenlinie des Punktes B (Bild 5), die Kurve $h_2^{M_1}$ wird durch die Menge des

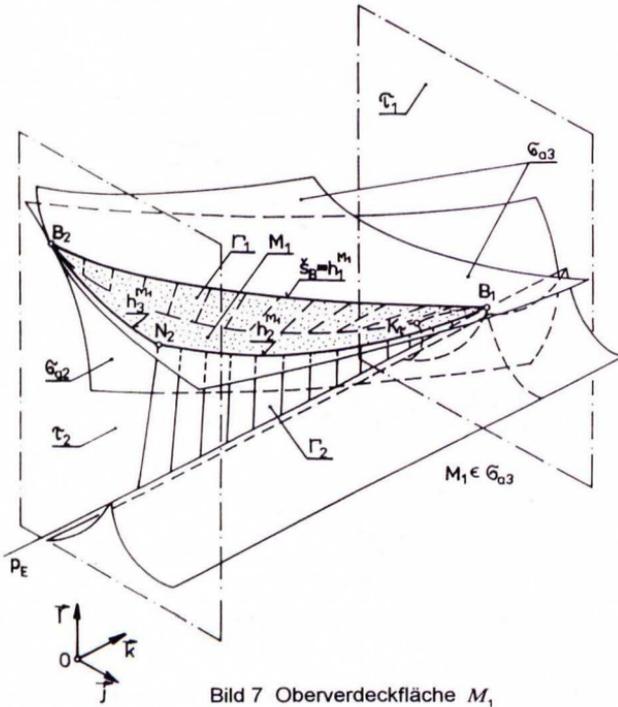


Bild 7 Oberverdeckfläche M_1

Fußpunktes N (Bild 7) der Senkrechten ausgebildet und die Kurve $h_3^{M_1}$ ist die Schnittlinie der Stirnebene τ_2 mit der Zahnkopffläche des Hauptrotors σ_{a3}

$${}_R \vec{r}_N = \begin{bmatrix} f \sin\left(\frac{p}{k_6} - k_2 \chi_3 - \mu_3\right) - a_w \sin\left(\frac{p}{k_6} - \chi_3\right) \\ f \cos\left(\frac{p}{k_6} - k_2 \chi_3 - \mu_3\right) - a_w \cos\left(\frac{p}{k_6} - \chi_3\right) + a_w \\ p \end{bmatrix} \quad (9)$$

Fläche M_2

Die Fläche M_2 wird durch zwei Teile (Bild 8) gebildet. Der erste Teil wird durch die innere Zylinderfläche des Gehäuses, die zum Nebenrotor gehört, gebildet und wird

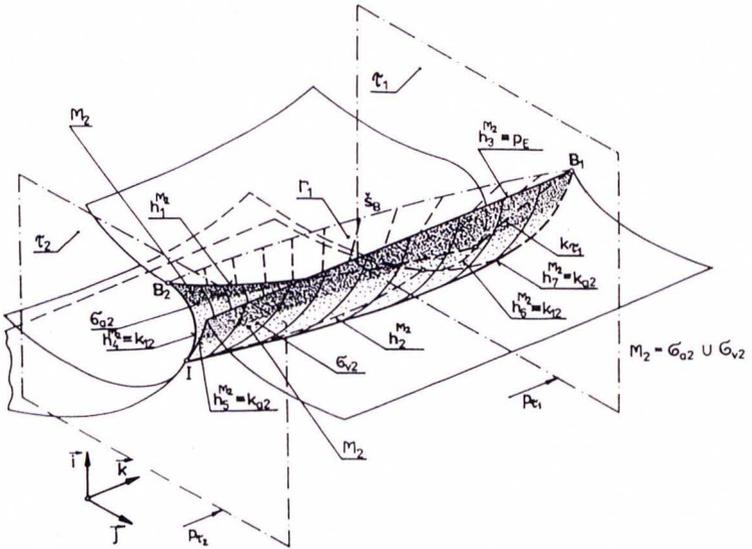


Bild 8 Niederdeckfläche M_2

$${}^R \vec{r}_L = \begin{bmatrix} -r_{a2} \sin \psi_4 \\ r_{a2} \cos \psi_4 \\ p_E \end{bmatrix} \quad (10)$$

durch Gleichung (10) beschrieben. Der zweite Teil der Fläche M_2 wird durch den Teil der Fläche des Zahnkopfes des Nebenrotors σ_{a2} (Bild 8) gebildet und wird mit Gleichung (11) ausgedrückt. Dieser zweite Teil wird auf der Fläche σ_{a2} durch die Grenzkurven $h_i^{M_2}$, $i = 1 \div 7$, begrenzt. Die Kurve $h_i^{M_2}$ wird durch die Menge des Fußpunktes der Senkrechten, die aus den Punkten der Schraubenlinie des Punktes B (Bild 7, 8) auf die Fläche σ_{a2} gefällt

$${}^R \vec{r}_K = \begin{bmatrix} -(r_{a2} - r_2) \sin \left(\frac{p}{c_1} + \mu_5 \right) - r_2 \sin \left(\frac{p}{c_1} - \psi_2 + \mu_5 \right) \\ (r_{a2} - r_2) \cos \left(\frac{p}{c_1} + \mu_5 \right) + r_2 \cos \left(\frac{p}{c_1} - \psi_2 + \mu_5 \right) \\ p \end{bmatrix} \quad (11)$$

werden gebildet. Die Kurve $h_2^{M_2}$ ist die Berührungskurve der Zahnfläche des Nebenrotors σ_{a2} und der Zylinderfläche σ_{v2} auf ihrer inneren Seite. Die Kurve $h_3^{M_3}$ ist die Geradenkante des Gehäuses (Bild 6). Die Kurven $h_4^{M_4}$ und $h_5^{M_5}$ sind die Schnittlinien der Stirnebene τ_2 mit der Flächen σ_{a2} und σ_{v2} . Ähnlich sind die Kurven $h_6^{M_6}$ und $h_7^{M_7}$ die Schnittlinien der Stirnebene τ_1 mit der Regelfläche Γ_1 und der Zylinderfläche σ_{v2} .

Seitenflächen

Die Flächen X_1, X_2 (Bild 9, 10) sind wieder die fiktiven Flächen, die den Verlustraum auf den Seiten begrenzen. Diese Flächen sind aus Rechengründen als die Stirnebenen gewählt worden.

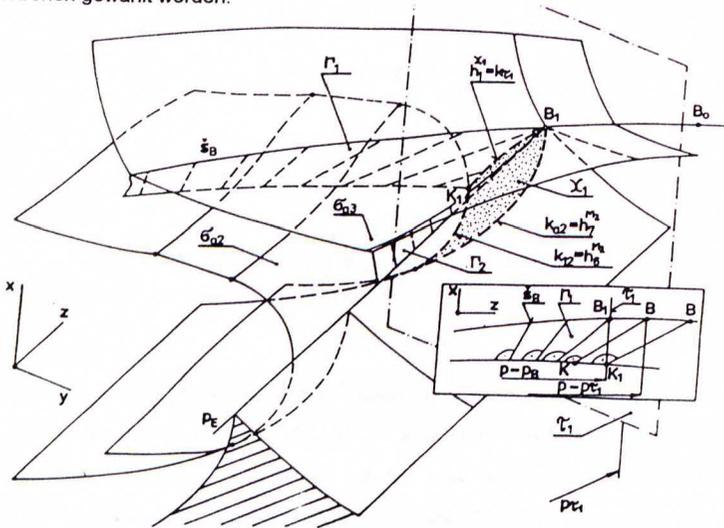


Bild 9 Rechte Seitenfläche X_1

Rechte Seitenfläche X_1

Die Seitenfläche X_1 wird durch die Stirnebene τ_1 (Bild 9), die durch den Punkt B_1 durchführt, gebildet und wird durch Gleichung (12) ausgedrückt

$$p = p\tau_1. \tag{12}$$

Punkt B_1 ist der Berührungspunkt der Schraubenlinie s_B des Punktes B mit der Geradenkante p_E des Gehäuses. Die Fläche X_1 wird durch die Grenzkurven $h_6^{M_2}, h_7^{M_2}$ und $h_1^{K_1}$ begrenzt. Die Kurve $h_1^{K_1}$ ist die Schnittkurve der Stirnebene τ_1 mit der Regelfläche Γ_1 .

Linke Seitenfläche X_2

Ähnlich wie die rechte Seitenfläche X_1 , wird die linke Seitenfläche X_2 durch die Stirnebene τ_2 (Bild 11) gebildet. Die Ebene τ_2 führt durch den Punkt B_2 , in dem die Schraubenlinie s_B die Zahnkopffläche des Nebenrotors σ_{a2} berührt. Die Ebene X_2 wird durch die Gleichung

$$p = p\tau_2 \tag{13}$$

ausgedrückt und wird durch die Grenzkurven $h_4^{M_2}, h_5^{M_2}, h_3^{M_1}$ und $h_1^{K_2}$ begrenzt. Die Kurve $h_1^{K_2}$ ist die Schnittkurve der Stirnebe τ_2 mit der Regelfläche Γ_2 .

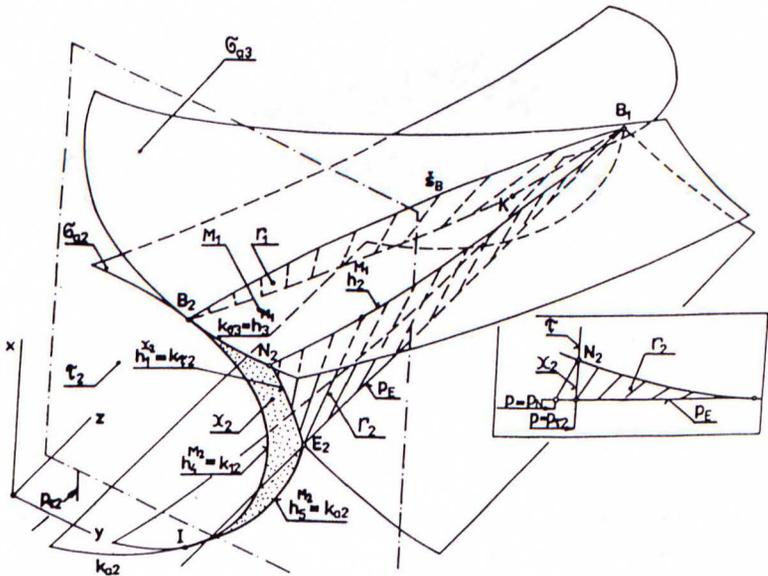


Bild 10 Linke Seitenfläche X_2

3. Verlustraummodell

Die Flächen $\Gamma_1, \Gamma_2, M_1, M_2, X_1, X_2$ begrenzen einen Verlustraum, der in Bild dargestellt wird. Die Grenzpunkte dieses Verlustraumes werden durch die Gleichung (3), (6) und (9) + (13) geschrieben. Diese Gleichungen bilden eine System von

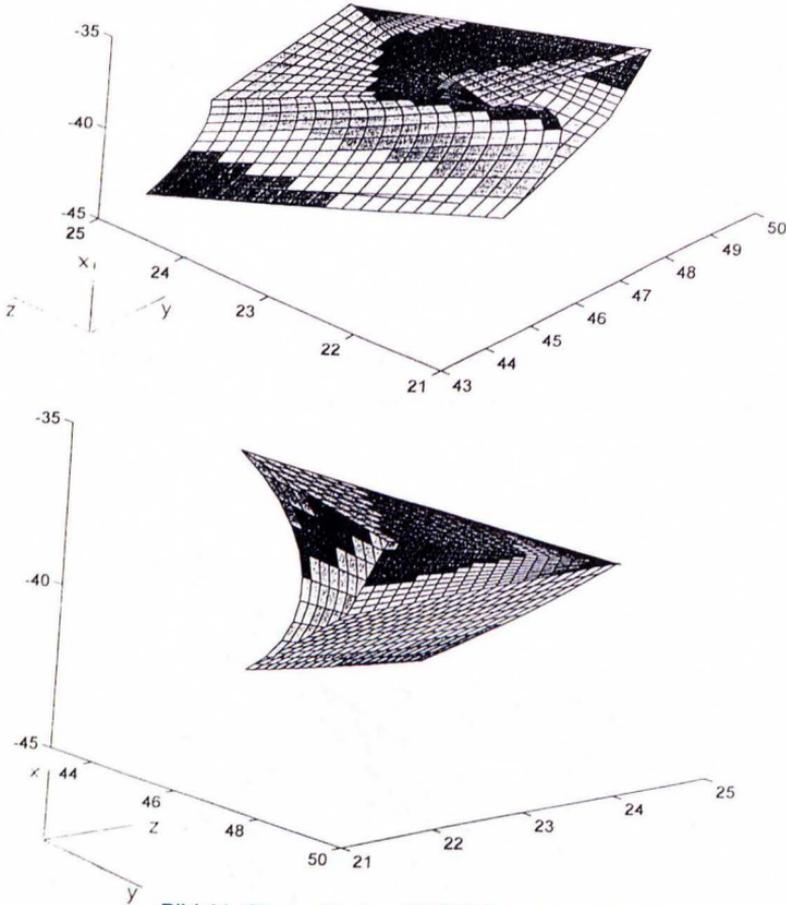


Bild 11 Geometrisches Modell des Verlustraumes

Parametergleichungen, so daß die Lage des allgemeinen Punktes L, der auf der beliebigen Fläche liegt, durch die Gleichung

$${}_R\vec{r}_L = {}_R\vec{r}_L(\rho, q) \tag{14}$$

im Raum R ausgedrückt wird. Der Parameter p ist der Allgemeinparameter der Verschiebung der Stirnebene und q ist der Allgemeinparameter, der die Parameter $q_1, q_2, \chi_3, \psi_2, \chi_4$ der einzelnen Grenzflächen umfasst. Für die anschließende Lösung der Geschwindigkeits-, Druck-, Wärme- und weitere Vorgänge, die im Verlustraum bei der Strömung des Gases entstehen und auch für die Eingliederung des Modells des Verlustraumes im Modell des Arbeitsraumes (Bild 1) wurde es notwendig ein geeignetes Koordinatennetz zu schaffen. Dieses Netz entsteht durch die Schnitte des Raumes der Stirnebene τ , die sich längs der Rotorenachsen bewegt. So ist es möglich das zweiparametrische Netz für die Punkte der Grenzfläche und das dreiparametrische Netz für die inneren Punkte des Verlustraumes einzuführen. Das parametrische Netz des Verlustraumes ist in Bild 12 dargestellt.

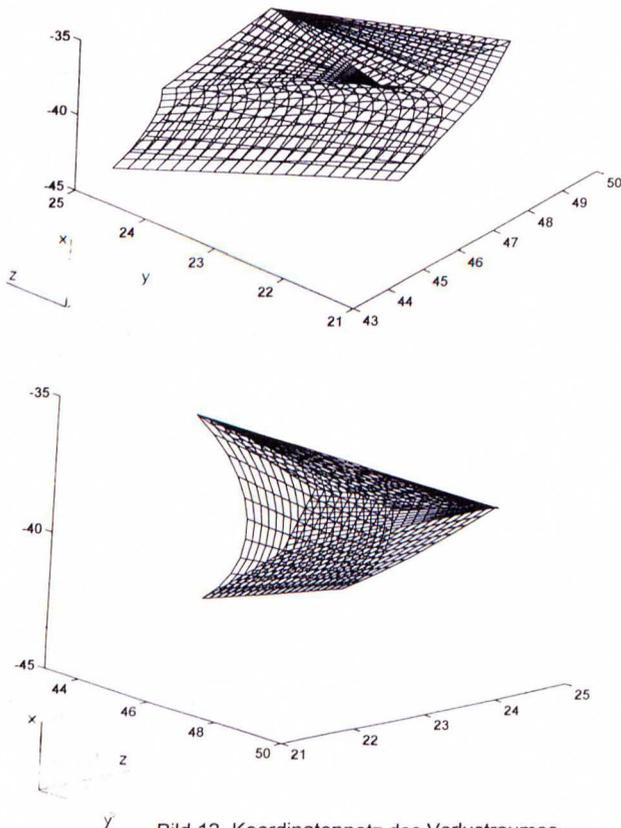


Bild 12 Koordinatennetz des Verlustraumes

Das Gleichungssystem (3), (6), (9) + (13) stellt das mathematische Modell des Verlustraumes dar. Die Computeralgorithmen wurden geschaffen und die numerische Lösung wurde für die Schraubenmaschine, die durch die Parameter aus dem Einleitungskapitel beurteilt wird, durchgeführt. Das Zahnprofil des Rotors in der Stirnebene war ein SLF4-Profil. Die Stirnschnitte durch den Verlustraum mit den zugehörigen Werten des Parameters p und des Flächeninhaltes der Schnitte werden in Bild 13 gezeigt. Der erste Schnitt für die Verschiebung der Schnittebene $p = 21,796$ mm stellt die linke Seitenfläche X_2 (Bild 10) dar. Diese Fläche X_2 und die Blaslochfläche in der Stirnebene ohne den Spalt (Bild 3) entsprechen einander. Der letzte Schnitt für die Verschiebung $p = 24,796$ mm stellt die rechte Seite X_1 (Bild 9) dar.

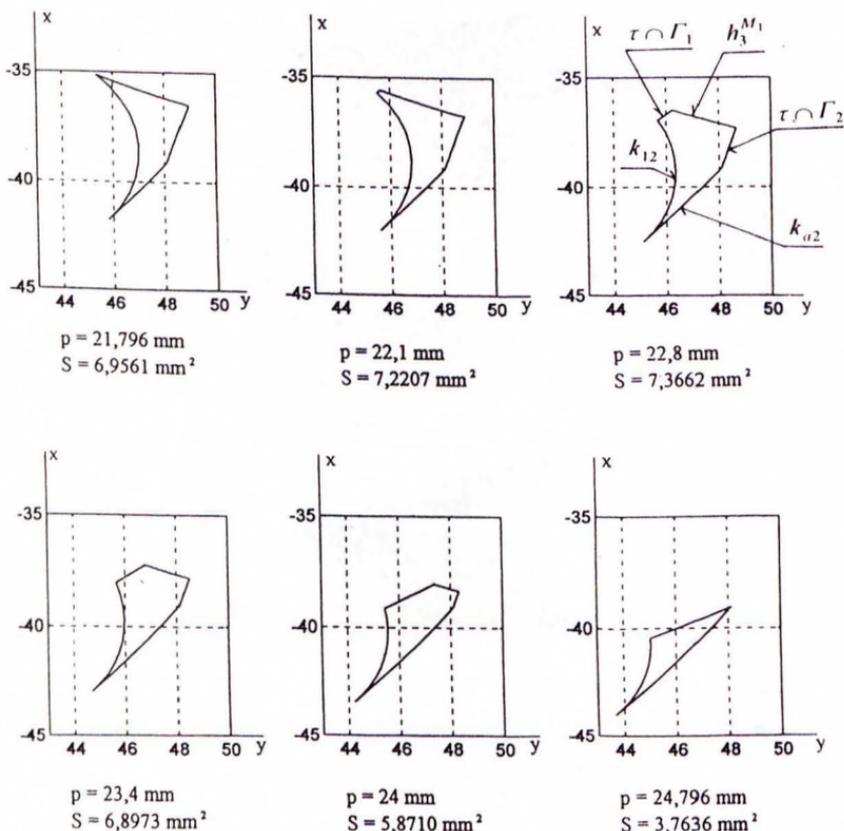


Bild 13 Stirnschnitte durch den Verlustraum

4. Schlußfolgerung

Die Schaffung der mathematischen Modelle des Arbeitsraumes und des Verlustraumes stellt die notwendige Basis für die exakte mathematische Modellierung der Vorgänge dar, die im inneren Raum der Schraubenmaschine ablaufen. Mit diesen Voraussetzungen kann durch die Modellierung eine Analyse der physikalischen Vorgänge erfolgen.

Literaturverzeichnis

- /1/ Švígler J., Albl P.: Mathematisches Modell des Arbeitsraumes des Schraubenkompressors. Computational Mechanics 96, Pernink 1996
- /2/ Rinder L.: Schraubenverdichter. Springer Verlag Wien, New York, 1979
- /3/ Švígler J., Vimmr J.: Loss surface in the course of tooth mesh of a screw compressor. Computational Mechanics 96, Pernink 1996