Berechnung der Gaskräfte in Schraubenverdichtern

Prof. Dr. **Andreas Huster**, FH Koblenz, Koblenz;
Dipl. Ing. (FH) **Sascha Michel**, NEUMAN & ESSER GmbH & Co. KG, Übach-Palenberg;
Dipl.-Ing. **Ulrich Thomes**, CompAir Drucklufttechnik GmbH, Simmern

Kurzfassung

Die in Schraubenmaschinen während des Verdichtungsprozess entstehenden Gaskräfte erzeugen in den Rotorlagern Belastungen. Zur Gewährleistung der garantierten Lebensdauer von kommerziell angebotenen Schraubenverdichtern werden im Rahmen dieses Beitrags numerische Verfahren zur Berechnung der resultierenden Kräfte dargestellt und eine windowsbasierende Software zur Berechnung aller Gaskräfte und den aus diesen resultierenden Lagerbelastungen vorgestellt.
Wesentliche Anforderung an ein solches Programm ist zunächst eine möglichst allgemeine Implementierung aller Rechenverfahren, unabhängig von der Zahn- bzw. Rotorgeometrie und der Ausführungsart des Verdichters. Weiterhin sollen die notwendigen Abmessungen und Rahmenbedingungen für die Berechnung der Gaskräfte in einer übersichtlichen und zweckmäßig gestalteten Eingabemaske definiert werden können. Im Ergebnis muss das Programm im Rahmen der Voraussetzungen eine hinreichende Näherung der realen Belastungen liefern, d.h. den periodischen Kraftverlauf in den Lagern sowohl in numerischer als auch grafischer Form abbilden.

1 Numerische Datenaufbereitung

Grundlage der Berechnungen bilden die benutzerseitig bereitgestellten Zahnprofile von Haupt- und Nebenläufer. Diese sind in verschiedenen festgelegten Formaten als Konturpolygone aus einer Datei in das Programm einzulesen. Alle profilabhängigen Hauptabmessungen können entweder separat im Dateiformat enthalten sein oder werden ausschließlich aus den Koordinaten der Zahnpolygone errechnet. Die so definierten Profile und ihre Hauptabmessungen werden in einer zweckmäßig gestalteten Benutzerschnittstelle dargestellt.
Die grafische Benutzeroberfläche in Bild 1 gliedert sich in drei Teilbereiche, die zum einen die Abmessungen des Rotorpaars und einen maßstabsgerechten Rotorpaarstirnschnitt, im darunter liegenden Bereich den der Kräfteberechnungen zu Grunde liegenden Druck- und Volumenverlauf und letztlich alle nötigen Angaben zur Gehäusedimensionierung und Lageranordnung enthalten. Sowohl profilunabhängige Rotorpaarabmessungen, wie z.B. Verschraubungswinkel und Rotorlänge, als auch die notwendigen Vorgaben zur Lagerpositionierung für jede Seite von Haupt- und Nebenrotor können mit Hilfe der zugehörigen Eingabefelder festgelegt und variiert werden. Zudem besteht die Möglichkeit, die Ergebnisse der imp-

lementierten Methoden zur idealisierten Druckberechnung über den Polytropenexponent, anwenderdefinierter Steuerkantenwinkel oder das innere Druckverhältnis in Abhängigkeit von Netz- und Ansaugdruck wahlweise mittels vorhandene Messreihen vorzugeben.
Die festgelegten Werte, und insbesondere die Zahnkonturpolygone von Haupt- und Nebenrotor, werden in einer zweckmäßigen Datenstruktur abgelegt. Dabei speichert das Programm jeden Konturpunkt in Form eines Vektorobjekts, und jeden Vektor in einem dem jeweiligen Rotorzahn zugeordneten Feld mit eigenem Koordinatensystem ab. Die Stirnseiten von Haupt- und Nebenrotor sind somit in Abhängigkeit der Zahnteilung als mehrfach im eigenen Koordinatensystem gedrehtes Zahnkonturpolygon darstellbar.

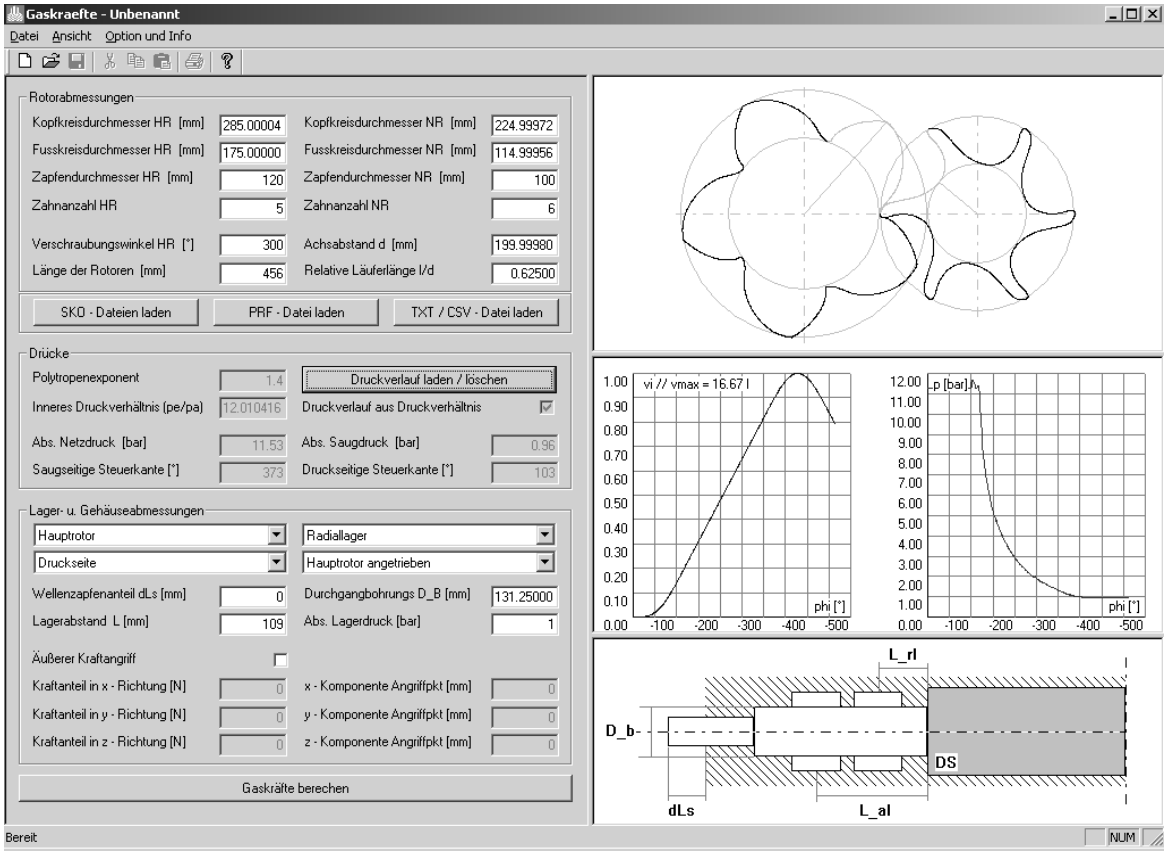

Bild 1: Eingabemaske des Simulationsprogramms

Im Programm werden alle Punkte nicht in einem, sondern in zwei charakteristischen Zahlentupel gespeichert. Das erste bildet dabei die Vektorkoordinaten eines Konturpunkts in kartesischen, das andere bildet den Konturpunkt in Polarkoordinaten ab. Dies ermöglicht bei der Formulierung der Rechenverfahren und Randbedingungen stets die zweckmäßigere Koordinatendarstellung zu wählen. Insbesondere bei der Koordinatentransformation vom Neben- auf das Hauptrotorkoordinatensystem erweist sich dies als besonders nützlich. Weiterhin bieten diese Datenobjekte alle notwendigen mathematischen Rechenoperatoren wie die Vektoraddition, Multiplikation sowie Abstands- und Winkelfunktionen als spezifische Ob-

jekteigenschaft, d.h. die herkömmlichen Rechenvorschriften sind auf die des mathematischen Vektors erweitert.

2 Modellbildung

2.1 Mathematische Grundlagen

Zum besseren Verständnis der im Programm implementierten Berechnungsverfahren sind nachfolgend einige geometrische Zusammenhänge der Vektorrechnung und damit die wesentlichen Eigenschaften der oben beschriebenen Vektorobjekte kurz zusammengefasst. Von besonderer Bedeutung für die nachfolgend erläuterten Rechenverfahren ist einerseits die relative geometrische Anordnung zweier oder mehrerer Vektoren, insbesondere jedoch die Bestimmung von Abständen, bzw. Schnitten zweier aus je zwei benachbarten Konturpunkte eines Rotoren definierten Geraden, und andererseits die Quantifizierung von Flächen mit beliebiger Kontur. Die Abstands- und Lageprobleme der Konturvektoren lassen sich mit den bekannten Definitions- und Abstandsgleichungen des Skalar- und Vektorprodukts, bzw. durch Aufstellen und Lösen einfacher linearer Gleichungssystemen beherrschen.
Für die Bestimmung von Flächeninhalten beliebiger Kontur wird die geometrische Bedeutung des Vektorprodukts genutzt. Wie in Bild 2 illustriert, entspricht der Betrag des Vektors, der sich aus dem Vektorprodukt zweier Vektoren ergibt, dem Flächeninhalt des von diesen aufgespannten Parallelogramms. Dabei können die Flächen sowohl positive als auch negative

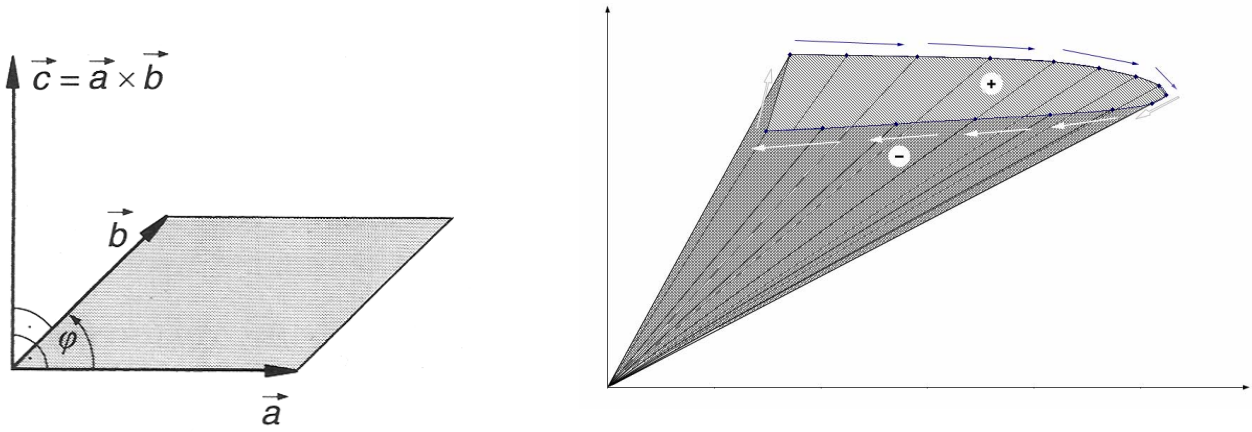

Bild 2: Geometrische Deutung des Vektorprodukts zur Flächenberechnung

Werte annehmen, abhängig davon, in welcher Reihenfolge das Vektorprodukt gebildet wird. Für die in Bild 2b dargestellte, durch ein Vektorpolygon eingegrenzte Beispielfläche, werden die Ortsvektoren in Pfeilrichtung durchlaufen. Die Hälfte des aus dem Vektorprodukt von je zwei aufeinander folgenden Punkten errechneten Werts ist gleich dem Dreieck, das durch die Vektoren selbst und deren Verbindung gebildet wird. Es gilt grundsätzlich, aus einer Drehung im Uhrzeigersinn und in der vorgegebenen Reihenfolge der Vektoren resultiert eine positive, in umgekehrter Drehrichtung innerhalb der Vektoranordnung eine negative Fläche.

Beginnend mit dem oberen linken Punkt bis zum äußeren rechten, entsteht bei der Bildung des Vektorprodukts von je zwei benachbarten Punkten in Pfeilrichtung eine positive Teilflächensumme. Die Berechnungen der Dreieckflächen des unteren Polygonabschnitts, sowie die des durch den letzten und ersten Punkt beschriebenen Dreiecks, ergeben negative Werte. In der Summe aller Teilflächen ist das Ergebnis positiv und entspricht der durch den Polygonzug eingegrenzten Fläche.
Insbesondere bei stark gekrümmten Konturen hängt die Qualität der Berechnung von der Anzahl der Konturpunkte und deren relativem Abstand ab, jedoch erweist sich im Falle der Zahnlückenberechnung bereits eine Anzahl von 200 Punkten i.d.R. als hinreichend genau.

2.2 Scheibentheorie

Grundlegend für die zu entwickelnden Verfahren zur Berechnung der Gaskräfte und Lagerreaktionen eines Schraubenverdichters ist die Wahl eines geeigneten Rotormodells, das der Forderung einer hinreichend genauen datentechnischen Abbildung des realen Verdichters genügt und andererseits eine starke Vereinfachung der komplexen, dreidimensionalen Rotorgeometrie ermöglicht. Wesentlich für das gewählte und sich bereits in zahlreichen anderen Fachbeiträgen bewährte *Scheibenmodell (Bild 3)*, ist die Reduzierung der sich in axialer Richtung erstreckenden Rotoren auf eine festgelegte Anzahl, um einen definierten Winkel zueinander verdrehter Scheiben konstanter Tiefe. Da üblicherweise die relative Steigung eines Rotors sowohl hinsichtlich des begrenzten Bauraums des Verdichters als auch aus fertigungstechnischen Gründen stets innerhalb eines kleinen, sinnvollen Bereichs liegt, ergibt sich, mit Annahme um je ein Grad gegeneinander verdreht angeordneter Schei-

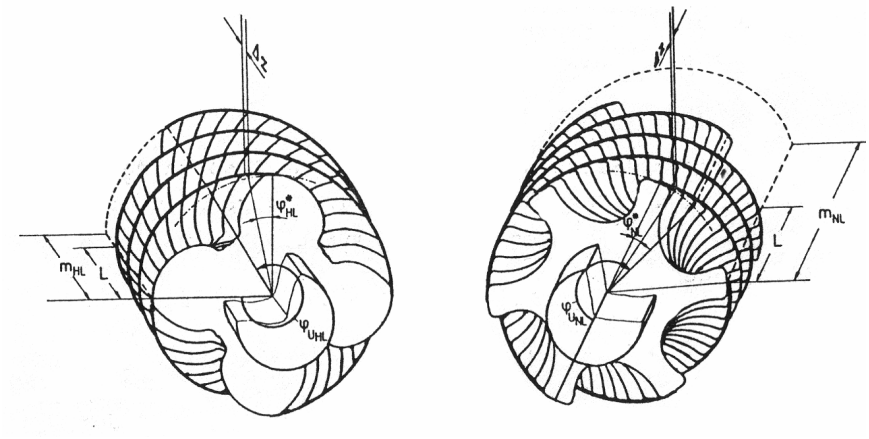

Bild 3: Scheibenmodell

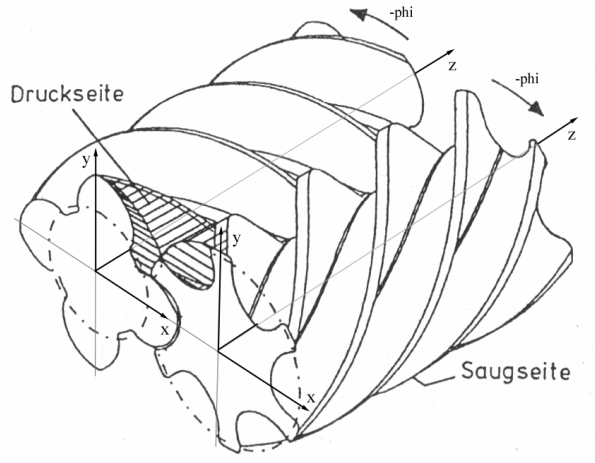

Bild 4: verwendetes Koordinatensystem

ben, eine hinreichend genaue Bild des realen Rotorpaars. Die Anzahl der Scheiben wird in diesem Zusammenhang mit dem Hauptrotorverschraubungswinkel festgelegt.
Alle weiteren Ausführungen beziehen sich auf dieses Scheibenmodell. Die abgebildeten Koordinatensysteme von Haupt- und Nebenrotor unterscheiden sich vom mathematisch rechtsdrehenden kartesischen Koordinatensystem nur in der Orientierung der z-Achse, die hier zweckmäßiger Weise und bezogen auf die druckseitige Stirnseiten des Rotorpaars in mathematisch negativer Richtung gewählt wird (Bild 4). Für die Berechnung der gesuchten Größen wird die Drehrichtung der Rotoren umgekehrt, also der Verdichter im Motorbetrieb simuliert.

2.2 Volumenkurve

Zur Berechnung der gesuchten Gaskräfte ist die Kenntnis aller Drücke und wirksamen Flächen in Abhängigkeit des Hauptrotorverdrehwinkels zwingend erforderlich. In der Regel ist der Druckverlauf nicht gegeben und muss aus der Zellentwicklung im Verdichtungsprozess abgeleitet werden. Ein Arbeitsraum des Rotorpaars lässt sich im Scheibenmodell und in beliebiger Rotorstellung als Summe aller Lückenvolumina der betrachteten Zelle auffassen, für die wiederum die Zahnlückenflächen der einzelnen Scheiben zu berechnen sind. Bild 5 zeigt beispielhaft für eine Rotorgeometrie den Zahnlückenverlauf über eine vollständige Drehung.

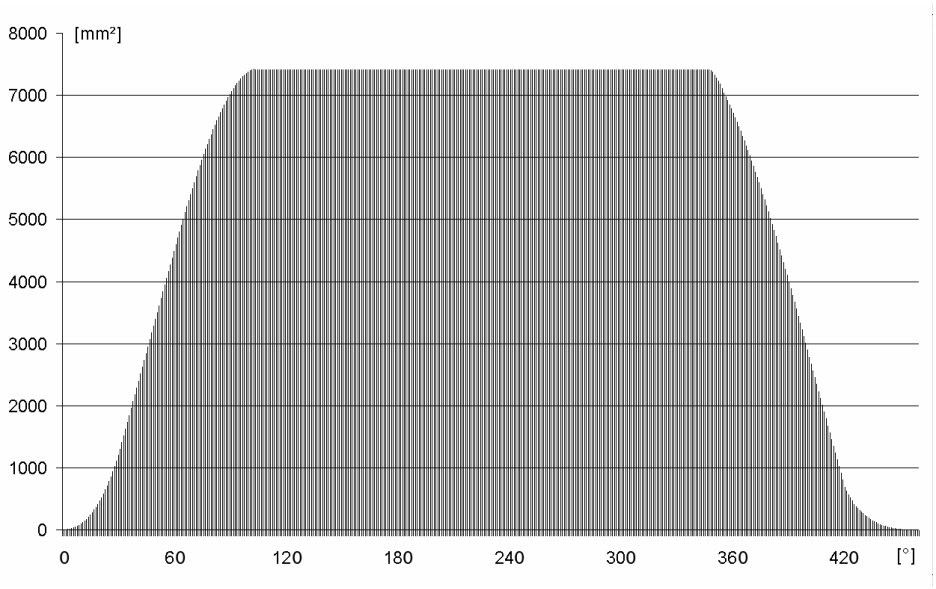

Bild 5: Verlauf der Zahnlückenflächenverlauf über dem Drehwinkel

Ist die Flächenentwicklung, ausgehend von einer sich druckseitig öffnenden, über den Verschraubungswinkel der Rotoren ausweitenden und zur Saugseite wieder schließenden Zahnlücke, in Abhängigkeit des Hauptrotorverdrehwinkels bekannt, lässt sich nunmehr mittels einer einfachen Summenfunktion $V=\sum A(\varphi)\cdot\delta_{Scheibe}$ der bezogene Zellvolumenverlauf einer Rotorzelle berechnen.

Für das Zellvolumen bei beliebigem Verdrehwinkel wird die Summe des Produkts aus Zahnlückenfläche und Scheibendicke, beginnend mit der Rotornullstellung bis zum vorgegebenen Verdrehwinkel, gebildet. Das maximale Lückenvolumen ergibt sich unmittelbar und unter Berücksichtigung möglicher Benutzervorgaben während des Verfahrens.

2.3 Druckverlauf

Unter Vernachlässigung aller realen Einflüsse innerhalb des Arbeitsraums kann der gesuchte Druckverlauf während der inneren Verdichtung mit Hilfe einer polytropen Zustandsänderung innerhalb der Maschine berechnet werden. Ein Polytropenexponent von ungefähr 1,15 beschreibt dabei den angenäherten Verdichtungsprozess eines Nassläufers, einer in der Größenordnung 1,45 den eines Trockenläufers für Luft. Für den Fall der Übernahme des Druckverlaufs aus einer Messung werden die i.d.R. in sehr kleinen Zeit- bzw. Winkelschritten und in Abhängigkeit des Zellvolumens abgelegten Drücke über den ermittelten Volumenverlauf interpoliert. Vorteile dieser Vorgehensweise ist das Einbeziehen der gemessenen Druckschwankungen beim Öffnen des Auslassfensters, sowie verschiedener Teillastsituationen mit stark veränderten Druckverläufen und daraus resultierenden Belastungen und Minderlasten.

2.4 Bestimmung des Profileingriffs

Die zur Berechnung des Zellvolumen- und Druckverlaufs gesuchte Zahnlückenentwicklung, und die dazu zu bestimmenden Zahnflächen einer jeden Modellscheibe des Rotorpaars, lassen sich mittels der Profileingriffspunkte definieren. Die gesuchten Stellen sind quasi Berührungspunkte der sich im Eingriff befindenden Haupt- und Nebenrotorzähne einer Scheibe. Quasi Berührungspunkte bedeutet in diesem Zusammenhang, dass jene Orte keine echten reibungsbehafteten Kontaktstellen, sondern vielmehr Stellen des geringsten Rotorpaarabstands sind. Diese Stellen können numerisch nur durch die Berechnung der relativen Lage der die Haupt- und Nebenrotorzahnflanken in einer Scheibe beschreibenden Konturpunkte gefunden werden. Dazu sind zunächst alle für einen minimalen Abstand infrage kommenden Haupt- und Nebenrotorpunktpaare aus der Gesamtpunktmenge zu bestimmen.
Es bietet sich die Ermittlung solcher Paare innerhalb eines Kreissektors an, welcher sich, wie in Bild 6 zu erkennen, über die polare Winkeldifferenz zweier unmittelbar aufeinander folgender Hauptrotorkonturpunkte definiert. Da jedes Zahnkonturelement als Ortsvektor in kartesischen und polaren Koordinaten vorliegt, kann die relative polare Position eines Nebenrotorvektors zu denen den Kreissektor aufspannenden Hauptrotorpunkten leicht bestimmt werden. Letztlich ist jedem Konturpunkt des Nebenrotors einem Kreissektor, d.h. zwei Hauptrotorvektoren zugeordnet. Die Anzahl der nötigen Abstandsberechnungen beschränkt sich somit auf das Zweifache der Nebenrotorpunktmenge.
Die Indizes der Vektorpaare und die paarweise mittels der Abstandfunktionen gefundenen Abstände liegen in einer zu diesem Zweck vorgesehenen temporären Liste ab, die nach je-

dem Suchvorgang innerhalb eines Abwälzschritts nach minimalen Abständen durchsucht wird. Da mindestens mit einem, jedoch auch mit mehreren Eingriffspunkten, bzw. minimalen Abständen in Abhängigkeit der betrachteten Rotorpaarstellung zu rechnen ist, muss für das Auffinden dieser Extrema innerhalb der in Frage kommenden Punktepaarmenge eine Einteilung festgelegt werden, die gewährleistet, dass in den Bereichen des realen Rotorzahns, in denen tatsächlich ein Eingriff stattfinden könnte, auch ggf. ein lokales Minimum gefunden wird. Diese Einteilung ist im oberen rechten Bild 6 skizziert und entspricht sinnvoller Weise einer Teilung des Zahnkonturpolygons in vor- sowie nachlaufender Zahnflanke und dem Zahnkopfbereich.
Zusammenfassend wird also mit Hilfe der oben skizzierten Vektormethoden für jede Rotorpaarstellung und in jeder Modellscheibe mindestens ein Eingriffspunkt im Bereich des Zahnkopfs gefunden, aber in den skizzierten Teilbereichen des Hauptrotorzahns auf bis zu drei Stellen geringsten Rotorabstands geprüft. Die ermittelten Punkte dienen einerseits zur Beschreibung und Berechnung der Zahnlücken und ihrer Entwicklung über dem Hauptrotorverdrehwinkel, und andererseits zur Ermittlung der Profileingriffsfläche, die im Zusammenhang der Axialkraftberechnung von Bedeutung ist.

2.5 Wirksame Flächen

Die eigentliche Flächenberechung der Zahnlücken erfolgt nach dem oben skizzierten Summenverfahren. Besonders einfach lassen sich die Stirnflächen von Haupt- und Ne-

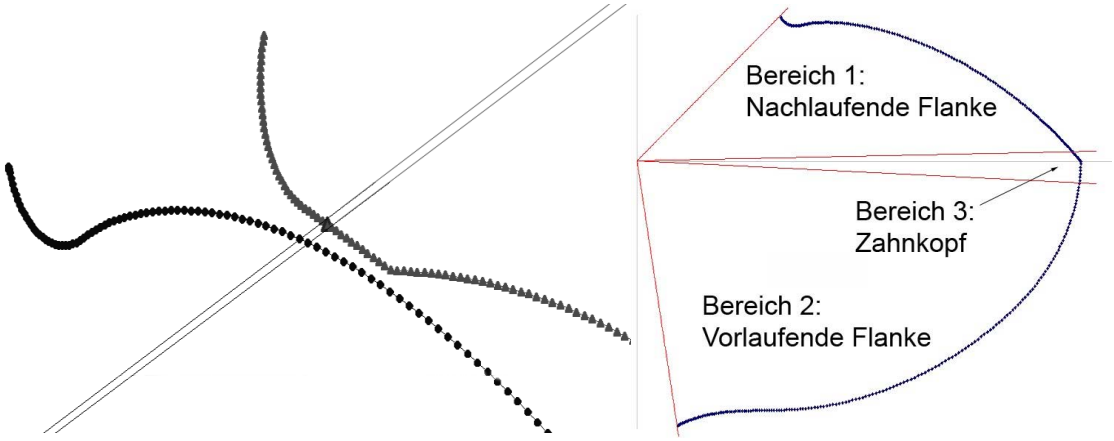

Bild 6: Ermittlung der Näherungspunkte beim Zahneingriff

benrotorzahn, sowie die von zwei aufeinander folgenden Zahnflanken eines Rotors und dem Rotorgehäuse begrenzte vollständigen Zahnlückenflächen bestimmen. Dabei werden im Flächenberechnungsverfahren die zuvor eingelesenen Ortsvektoren der jeweiligen Zahnkonturpolygone durchlaufen und von der resultierenden Summe aller Teilflächen die Kreissektorfläche des Wellenzapfens subtrahiert. Die vollständige Zahnlücke eines Rotors

ergibt sich analog als Differenz aus dem durch die Zahnteilung definierten und den Rotorzahn umschließenden Kreissegment und der zuvor numerisch integrierten Zahnstirnfläche (Bild 7).

Von besonderem Interesse sind jedoch aller Lückenflächen, bei denen ein Zahneingriff stattfindet. Anders als bei den vollständigen Bereichen ohne Zahneingriff muss für jene durch einen sich im Eingriff befinden Rotorzahn reduzierten Zahnlücken das äußere, die Fläche definierende Konturpolygon fallabhängig ermittelt werden. Die zuvor gefundenen Eingriffspunkte stellen dabei die Grenzen derjenigen Flächenränder dar, die sich mittels der Zahnkontur beschreiben lassen. Abhängig von der Anzahl der gefundenen Eingriffspunkte setzt eine definierte Fallroutine die an der Lückenkonturbildung beteiligten Rotor- und äußeren Gehäusemantelsegmente zu dem gesuchten Konturpfad zusammen und integriert diesen numerisch zur gesuchten Fläche auf. Gleichermaßen erfolgt die Aufteilung der Zahnlückenflächen in ihre Haupt- und Nebenrotoranteile, die im Rahmen der Axialkraftberechnung von Bedeutung sind. Dazu wird das Konturpolygon an den Schnittpunkten des Hauptrotorkopfkreises getrennt und die jeweiligen dem anderen Rotor zugeordneten Polygonanteile durch die Vektoren des Kopfkreisbogens ersetzt.

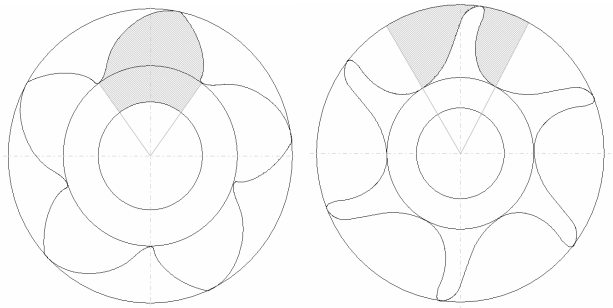

Bild 7: Datenbereiche zur Berechnung der Zahnlücken und Zahnflächen

Am Ende jeder Fallroutine werden die gefundenen Lückenflächen in einem geeignet sortierten Feld drehwinkelabhängig abgelegt. Sowohl für die gefundene Gesamtfläche, als auch nach dem Aufteilen dieser in Haupt- und Nebenrotoranteile, werden im Programm aus den Konturpolygonen die Flächenschwerpunkte berechnet, die in den späteren Verfahren zur Gaskräftebestimmung als Orte des Kraftangriffs dienen, und speichert diese ab. Nach Abschluss der Berechnungen und Sortieren der Elemente kann der Verlauf der Lückenentstehung durch das Feld nachvollzogen und unmittelbar in den des Zellvolumens umgerechnet werden.

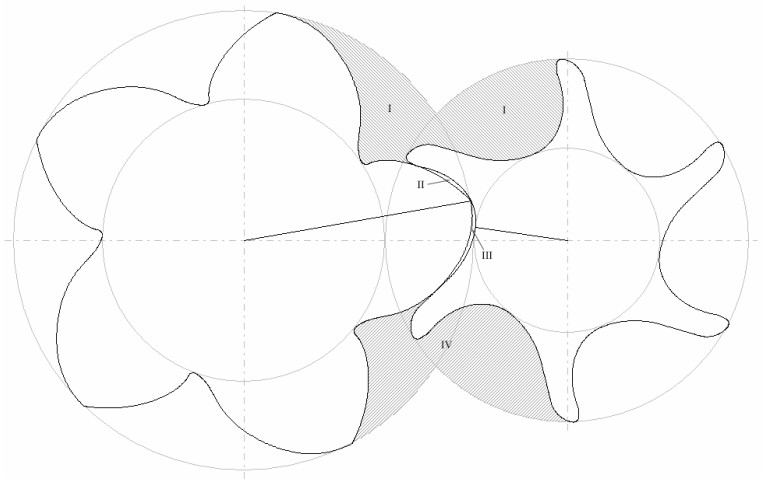

Bild 8: Näherungspunkte und Zahnlückenbereiche

In den Software-Routinen sind Fallunterscheidungen implementiert, die auch Profile und Rotorstellungen berücksichtigen, wie in Bild 8 dargestellt.

Entsprechend der jeweiligen Näherungspunkte werden bis zu 4 Bereiche unterschieden. Schließlich werden programmintern die Summe der zuvor bestimmten vollständigen Zahnlücken ergänzt, die bei den betrachteten Fallroutinen nicht erfasst wurden. Aus der so vollständig bekannten Zahnlückenentwicklung lässt sich, wie oben dargestellt, der bezogenen Zellvolumen- und Druckverlauf ableiten.

3 Simulationssystem

3.1 Axialkräfte

Der Druckverlauf in einer Zahnlücke und die Druckverteilung aller Arbeitsräume über die gesamte Rotorlänge erzeugen verdrehwinkelabhängige Belastungen in den Axial- und Radiallager eines Schraubenverdichters. Somit ist die Bestimmung der wirksamen Radial- und Axialkräfte für die konstruktive Auslegung der Lagerung von entscheidender Bedeutung. Dazu werden die Kräfte einer Zahnlücke, und schließlich des ganzen Rotors, für die Periode eines Zahnteilungswinkels des Hauptläufers berechnet.

Die aus den Gaskräften resultierenden Axialkräfte und Axiallagerbelastungen setzen sich aus fünf den Teilkräften Wälzkraft, Druckkraft auf die Wellenzapfen, axiale Druckkraft der Zahnlücke, Druckkraft aus dem Profileingriff und der Druckkraft auf die Stirnflächen zusammen. Die Wellenzapfenkraft wirkt auf die Absätze der beiden Wellenzapfen eines Rotors unter der Voraussetzung, dass an diesen Orten ein vom Umgebungsdruck verschiedener Druck wirkt. Bedingt durch die konstruktive Gestaltung des Verdichtergehäuses entstehen, insbesondere an den Durchgangsbohrungen der Wellenenden im Gehäuse, ein Druckausgleich zwischen den Verdichterzellen und dem Lagerraum. Weiterhin kann bei Anlagen mit Ansaugdrosselung der Saugdruck deutlich unten den Umgebungsdruck fallen, so dass auf die ggf. nur saug- oder druckseitig aus dem Gehäuse herausragenden Wellenenden eine durch die Druckdifferenz von Saug- und Umgebungsdruck zurückzuführende Kraft wirkt.

Die Wälzkraft entsteht durch die mechanische Übertragung des Drehmoments von angetriebenen zum getriebenen Rotor. Im Falle eines Nassläufers wirkt die Wälzkraft unmittelbar an den Flanken der sich im Eingriff befindenden Rotorzähne. Bei einem Trockenläufer hingegen überträgt ein äußeres Gleichlaufgetriebe, mit zu den Läufern identischen Wälzkreisen, das Drehmoment. Da ein Schraubenverdichter ohne Synchronisationsgetriebe hinsichtlich der Drehmomentübertragung dennoch wie ein mechanisches Zahnradpaar mit der durch die Zahnteilung der Rotoren festgelegten Übersetzung arbeitet, ist die Wälzkraftberechnung von der Ausführungsart des Schraubenverdichters unabhängig.

Die Wälzkraft ist, wie auch die Wellenzapfenkraft, im Verhältnis zur Gesamtaxialkraft klein, insbesondere dann wenn der Hauptläufer angetrieben wird, da das aus den Gaskräften auf den Nebenläufer wirkende und vom Hauptläufer zu übertragende Drehmoment etwa nur ein Zehntel des im umgekehrten Fall zu übersetzenden Hauptrotormoments beträgt.

Aus dem auf die Zahnlückenflächen für eine Rotorpaarstellung wirksamen Druck resultiert eine Axialkraft, die sich wiederum aus den Kraftangriffen zweier Flächenbereiche der Lücke zusammensetzt. Betrachtet man den Verlauf einer Zahnlücke entlang der Rotorlängsachse, so lässt sich dieser hinsichtlich eines möglichen Kraftangriffs in drei Bereiche einteilen. Im vorderen, druckseitigen Zahnlückenbereich wirkt der momentane Arbeitsraumdruck auf die im Stirnschnitt sichtbare, axial projizierte Lückenfläche und somit eine zur Saugseite gerichtete Kraft. Im mittleren Bereich der Lücke greift aufgrund der symmetrischen Anordnung der axialen projizierten Zahnflankenflächen der beiden an der Lückenbildung beteiligten Zähne keine resultierende Kraft in axialer Richtung an. Im Bereich des Profileingriffs überlappen Haupt- und Nebenrotorzahnflanken derart, dass eine Resultierende auf beide Rotoren wirkt (Bild 9).

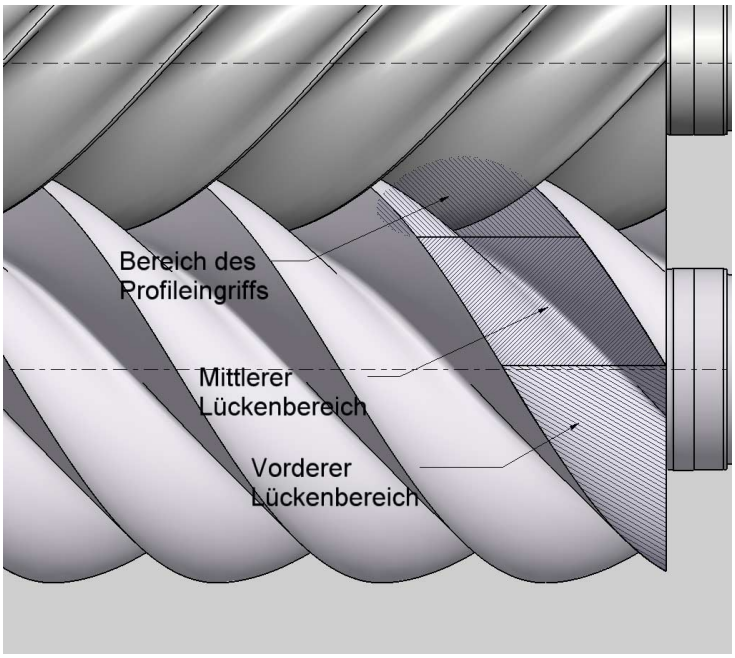

Bild 9: Einteilung der Zahnlückenbereiche

Die notwendigen Größen zur Bestimmung der ersten Teilkraft, d.h. die für die Berechnung der Volumenentwicklung ermittelten Zahnlückenflächen, deren Flächenschwerpunkte sowie Aufteilung auf den Haupt- und Nebenläufer und letztlich der Druckverlauf über dem Hauptrotorverdrehwinkel, sind aus der Volumenberechnung bekannt. Der resultierende Anteil der Gesamtaxialkraft aus den Druckbelastungen der Zahnlücken an den Stirnseiten des Gehäuses ergibt sich somit als Summe aller Drücke mit den jeweiligen Teilflächen. Im Profileingriff eines Zahnpaares überlappen, betrachtet von der druck- in Richtung der saugseitigen Stirnfläche, Haupt- und Nebenläuferzahnflanken derart, dass ein Zahn des Rotors mit der größeren Zähneanzahl in positiver axialen Richtung stets vor dem des Rotors mit der geringeren Zähneanzahl liegt. Das bedeutet wiederum, dass auf die einen Arbeitsraum begrenzende und druckbeaufschlagte Hauptrotorzahnflanke, bezüglich des festgelegten Koordinatensystems, eine positive, auf die begrenzende Nebenrotorzahnflanke eine negative Axialkraft wirkt.

Zur Berechnung dieses Kraftanteils ist die Kenntnis der sich überlappenden, axial projizierten Zahnflankenflächen im Bereich des Profileingriffs zwingend erforderlich. Bereits für die Berechnung des Zahnlückenflächen- und Volumenverlaufs wurden die quasi Eingriffspunkte eines Zahnpaares bestimmt. Der Verlauf der so gefundenen Profileingriffslinie begrenzt, be-

trachtet vom Zahnfuß eines ersten bis zum Zahnfuß eines folgenden Rotorzahns, jene gesuchten, sich überdeckenden Zahnflankenanteile eines Arbeitsraums

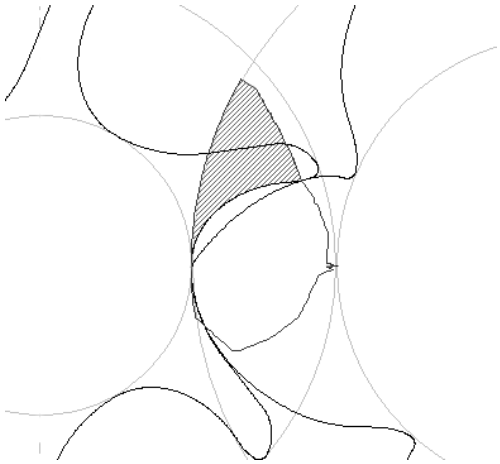

Bild 10: unvollkommener Profileingriff

Wird die sich räumlich über den gesamten Rotor erstreckende Profileingriffslinie auf die sich im Eingriff befindenden Zahnpaare aufgeteilt, so ergeben sich aufgrund der endlichen Läuferlänge an den druck- und saugseitigen Stirnflächen zwangsläufig unvollständige Eingriffsflächen, die wiederum zur korrekten Berechnung der axialen Profileingriffskraft verdrehwinkelabhängig und gesondert ermittelt werden müssen. Bild 10 zeigt für die Saugseite einen unvollständigen Profileingriff. Das Konturpolygon lässt sich aus einem Bereich des in die Stirnebene projizierten Profileingriffpfads und den in axialer Richtung näher zur Druckseite liegenden Zahnflankenvektoren begrenzen. Die aus der gefundenen Kontur berechenbare druckseitige Teilfläche wird dem momentanen Hauptrotorverdrehwinkel, die saugseitige Fläche dem dieser Rotorstellung auf der Saugseite, gerade um den Verschraubungswinkel zur Rotorstellung der Druckseite verdrehten Winkel zugeordnet.

Abhängig von der Zahnteilung des Rotorpaars und dem Verschraubungswinkel des Hauptläufers existieren **n** vollständiger Profileingriffe zwischen der Druck- und Stirnseite der Rotoren. Die resultierende Profileingriffskraft ergibt sich durch die Summation der jeweiligen Flächenanteile, die mit den entsprechenden Drücken multipliziert werden.

Infolge der Leckageströmungen im Stirnspalt, und den damit verbundenen Strömungen zweier benachbarter Zahnlücken, wirkt eine weitere axiale Kraft im Schwerpunkt der Stirnfläche eines Rotorzahns. Der Betrag der Zahnstirnkraft ist bei gegebener Profilgeometrie ausschließlich abhängig von der Druckverteilung über der Zahnstirnfläche. Diese kann auf Grundlage von Messungen in linear angenommen werden /3/. Der aus diesem linearen Verlauf sich ergebende mittlere Druck, die resultierende Kraft eines Zahns und letztlich die der gesamten Rotorstirnfläche soll mittels der nachfolgenden Überlegungen berechnet werden.

Wird sowohl der Haupt- als auch der Nebenrotorzahn entlang der Verbindungslinie vom Koordinatenursprung zum Zahnkopf in zwei Hälften eingeteilt, und werden die beiden so erhaltenen Teilzahnflächen mit den Drücken der ihnen unmittelbar benachbarten Rotorzellen beaufschlagt, ergibt sich der über die Gesamtfläche gemittelte Druck bei einem asymmetrischen Zahnprofil etwa zu zweidrittel des größeren der beiden Zelldrücke Für einen symmetrischen Zahnkonturverlauf resultiert ein Mittelungsfaktor 0,5. Dennoch problematisch erscheint das Berechnen des mittleren Drucks im Falle eines Zahnes, der sich an einer der Stirnseiten im Eingriff befindet.

Im Ergebnis liefert das dargestellte und stark vereinfachte Verfahren zur Berechnung der an den Zahnstirnflächen von Haupt- und Nebenrotor anliegenden mittleren Drücken und Kräften zwangsläufig einen kontinuierlichen und sich periodisch wiederholenden Kraftverlauf, der sich mit der eingangs getroffenen Plausibilitätsbetrachtung begründen lässt.
Zur Berechnung der Gesamtaxialkraft werden letztlich für Haupt- und Nebenrotor getrennt die fünf Teilkräfte und ihre Angriffspunkte über die Periode eines Hauptrotorzahnteilungswinkels mit den entsprechenden Angriffspunkten aufsummiert.

2.3 Radialkräfte und Drehmoment

Die Druckverteilung in den Arbeitsräumen erzeugt neben den Axialkräften eine verdrehwinkelabhängige Belastung der Radiallager des realen Schraubenverdichters. Zu deren Bestimmung werden zunächst für die Radialkraft und die Drehmomententwicklung die Kräfte einer Zahnlücke, die einer Scheibe und letztlich, nach der Addition aller Scheibenresultierenden einer bestimmten Rotorstellung, die des Rotorpaars für eine vollständige Zahnabwälzung berechnet.
Zur Ableitung der Teilkräfte einer Scheibe können die wirksamen Zahnflankenflächen durch mehrerer radial projizierter Scheibenflächen ersetzt und die auf diese senkrecht wirkende Kraft berechnet werden. Die vereinfachte Ersatzfläche definiert sich durch die Begrenzungspunkte einer jeden Scheibenlücke und der mit der Teilung des Rotors festgelegten Scheibentiefe. Die Definition der radialen Kammerflächen erfolgt analog nach den drei oben dargestellten Fallunterscheidungen, wobei für die Sehnenbeschreibung nur die Profileingriffspunkte von Bedeutung sind. Programmintern wird bereits mit der Ableitung der Zahnlückenpolygone bestimmt, ob fallabhängig die gesuchten Sehnen von zwei Eingriffspunkten, einem Eingriffspunkt und dem diesen in Drehrichtung nachlaufenden Zahnkopf oder im Trivialfall einer vollständigen Lücke von zwei aufeinander folgenden Zahnköpfen gebildet wird. In jedem Fall genügt eines der beschriebenen Punkt- bzw. Vektorpaare aus, um einerseits Lage und Richtung der Sehne und andererseits, unter Einbeziehung des bekannten Druckverlaufs, die wirksame Scheibenkraft und ihre radiale und tangentiale Kraftkomponente in der jeweils betrachteten Lücke zu bestimmen.
Der Betrag jener Kraft ergibt sich unmittelbar aus dem Produkt der projizierten Lückenfläche und dem verdrehwinkelabhängigen, absoluten Druck des Arbeitsraums. Um die Wirkungslinie der Kammerkraft und deren radialen und tangentialen Komponenten zu ermitteln, wird das Vektorprodukt der die Ersatzfläche aufspannenden Vektoren, d.h. der Normalenvektor der Fläche bestimmt.
Nach Normierung des Normalenvektors erfolgt die Zerlegung in seine radiale und tangentiale Vektorkomponente. Die Tangentialkomponente des Normalenvektors (Bild 11) ergibt sich letztlich aus dem Produkt seines Betrags, also 1, und dem Sinus des eingeschlossenen Win-

kels. Weiterhin sind die Kammerkräfte mit dem Produkt der absoluten Kraft und der jeweiligen Komponente des normierten Normalenvektors gegeben.

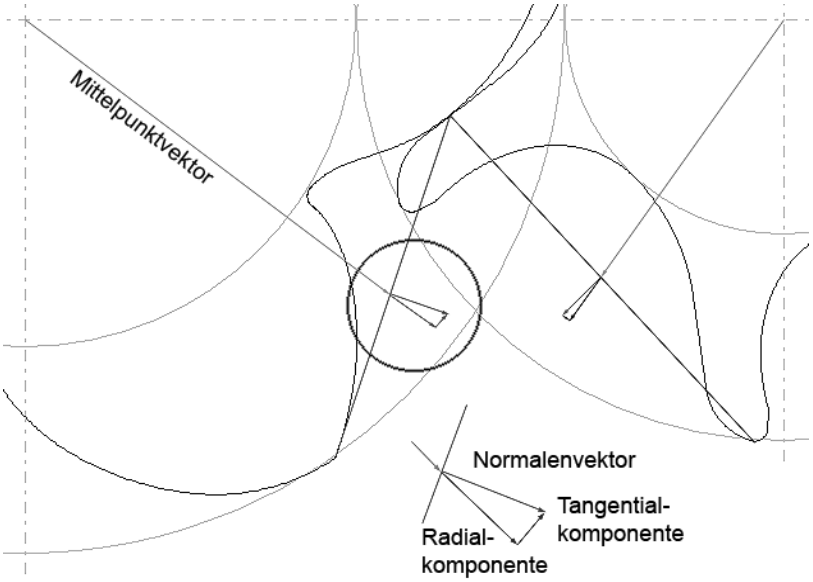

Bild 11: Vektorzerlegung der Kammerkraft in einer Scheibe

Mit den nunmehr bekannten Größen aller Zahnlückenflächen einer jeden Scheibe kann nun die resultierende Radialkraft an Haupt- und Nebenrotor schrittweise und verdrehwinkelabhängig errechnet werden.

Analog und parallel zur Bestimmung der Radialkraft werden im Programm die aus den Gaskräften resultierenden Drehmomente von Haupt- und Nebenläufer berechnet. Sie entstehen ausschließlich aus der tangentialen Kraftkomponenten der sich im Eingriff befindender Scheibenlücken, da aufgrund der symmetrischen Anordnung der Sehnenflächen in den vollständigen Scheibenlücken keine Tangentialkomponente der existiert. Somit gilt für die Berechnung des Drehmoments $M_{Lücke}=p\ \sum A_{Sehne}\ t_{Sehne,}$ und letztlich für das aus der Überlagerung aller Lückenmomente resultierende Haupt- oder Nebenrotormoment $M_{Rotor}=\sum M_{Lücke}$.

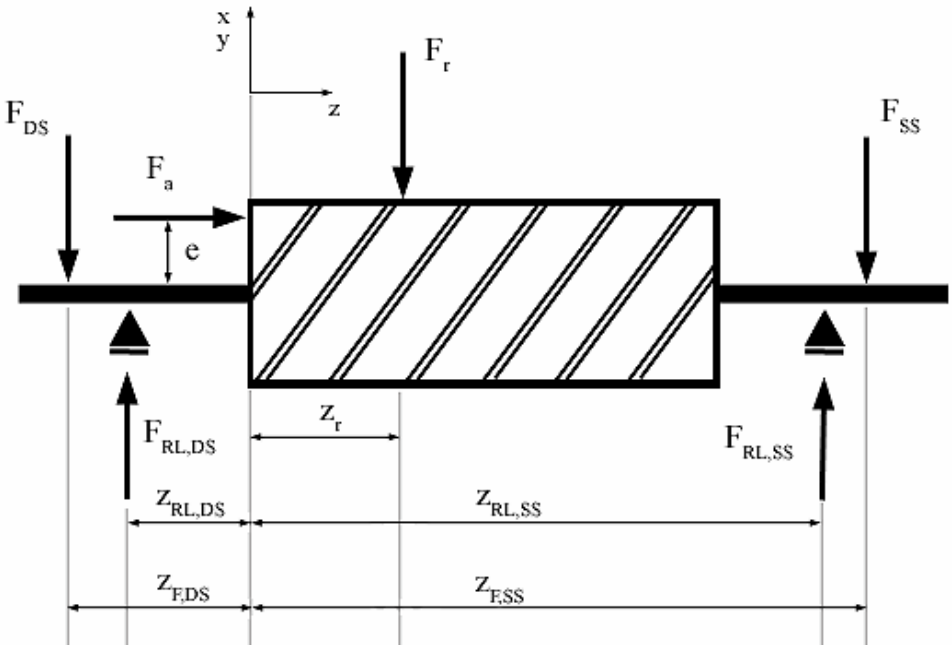

Bild 12: Kraftangriffspunkte an einem Rotor

Die Reaktionskräfte der Radiallager sollen nachfolgend aus den Gleichgewichtsbedingungen des Kraftangriffs an beiden Rotoren hergeleitet werden. Für diese sind zunächst die oben berechneten Radialkräfte und die ggf. vom Benutzer festgelegten, äußeren

Belastungen maßgebend. Darüber hinaus bewirkt das aus dem exzentrischen Angriff der berechneten Axialkraft resultierende Drehmoment um die Querachsen des Rotorpaars eine weitere Belastung der saug- und druckseitigen Radiallager. Bild 12 zeigt qualitativ die Verhältnisse an Haupt- und Nebenläufer.
Aus den Gleichgewichtsbedingungen, sowie aus den Bedingungen der Momente um das druckseitige Radiallager, können die Reaktionskräfte in Abhängigkeit des Drehwinkels bestimmt werden.

4 Beispielrechnung

Abschließend werden die Ergebnisse einer Beispielrechnung dargestellt. Es handelt sich dabei um einen einspritzgekühlten Luftverdichter mit DLT – V Profil der Firma CompAir Drucklufttechnik GmbH. Alle Spezifikationen des EK 285 sind in der nachfolgenden Tabelle 1 abgelegt. Der Hochdruck beträgt 8 bar.

Tabelle 1: Geometrische Hauptabmessungen des berechneten Schraubenverdichters

	Hauptrotor	Nebenrotor
Kopfkreisdurchmesser [mm]	285	225
Fußkreisdurchmesser [mm]	175	115
Wälzkreisdurchmesser [mm]	181,81	218,19
Länge [mm]	456	456
Verschraubungswinkel [°]	300	250
Zähnezahl	5	6
Achsabstand [mm]	200	200

Die Tabelle 2 enthält die ermittelten maximalen und mittleren Belastungen, die für konstruktive Auslegung der Lagerung von besonderem Interesse sind.

Tabelle 2: Ergebnisse der Simulation

	Maximalkraft [N]	Mittlere Kraft [N]
Axiallagerbelastung HR	19193	18231
Axiallagerbelastung NR	3932	3650
Radiallagerbelastung HR SS	9063	8018
Radiallagerbelastung HR DS	12166	11050
Radiallagerbelastung NR SS	8954	8133
Radiallagerbelastung NR DS	7903	7278

Die maximale Lagerbelastung tritt für den Hauptrotorverdrehwinkel φ = -47° auf. Die Extrema für die Radial- und Axialkraft an dieser Stelle betragen:

	HR	NR
Gesamtaxialkraft [N]	19193	3932
Radialkraft [N]	29866	25653

Nachfolgend und abschließend sind die errechneten Verläufe der Radial- und Axialkraft grafisch dargestellt (Bilder 13 und 14).

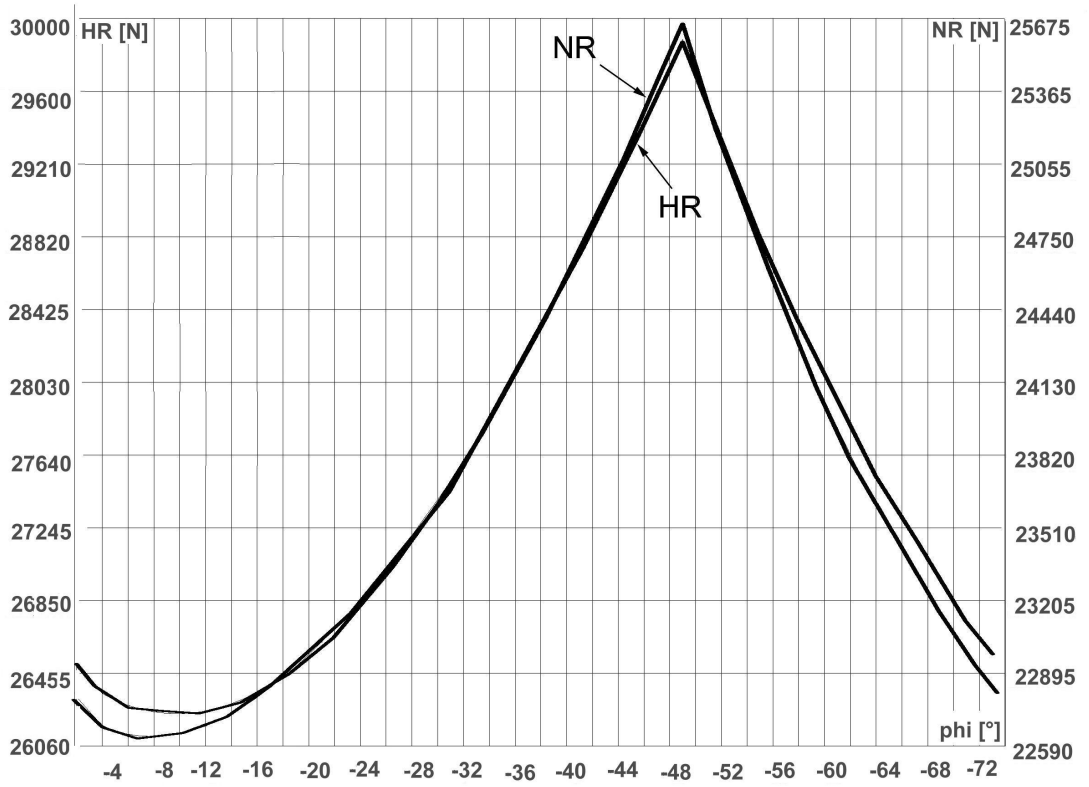

Bild 13: Radialkraftverlauf an Haupt- und Nebenrotor

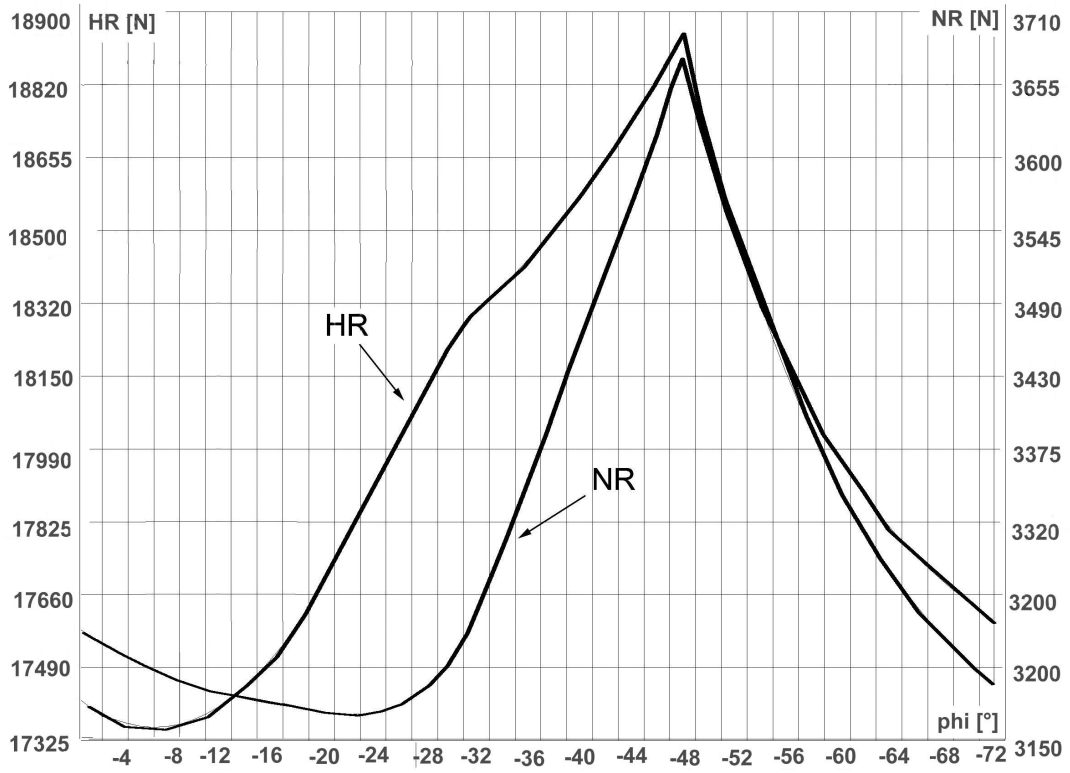

Bild 14: Axialkraftverlauf an Haupt- und Nebenrotor

5 Formelzeichen und Indizes

Symbol	Bedeutung	SI-Einheit
A	Fläche	m^2
F	Kraft	N
M	Moment	Nm
n	Betrag eines normierten Normalenvektors	[-]
p(φ)	Abs. Druck bei gegebener Rotorstellung	Pa
t	Betrag eines normierten Tangentialvektors	m
V	Volumen	m^3
V(φ)	Volumen bei gegebener Rotorstellung	m^3
x	Kraftangriffskomponente in x-Richtung	m
y	Kraftangriffskomponente in y-Richtung	m
z	Zähneanzahl eines Rotors	m
δ	Scheibendicke	m
φ	Verdrehwinkel des Hauptrotors	[-]

DS	Index Druckseite
SS	Index Saugseite
RL	Index Radiallager
AL	Index Axiallager
r	Index radial
a	Index axial
P	Index Profilkraft
PE	Index Profileingriff
WZ	Index Wellenzapfenkraft
Wälz	Index Wälzkraft
ST	Index Stirnkraft
ZS	Index Zahnstirnkraft

6 Literatur

[1] Fister, Werner: Fluidenergiemaschinen Band 1, Springer-Verlag 1984

[2] Fister, Werner: Fluidenergiemaschinen Band 2, Springer-Verlag 1986

[3] Rinder, Laurenz.: Schraubenverdichter, Springer-Verlag 1979